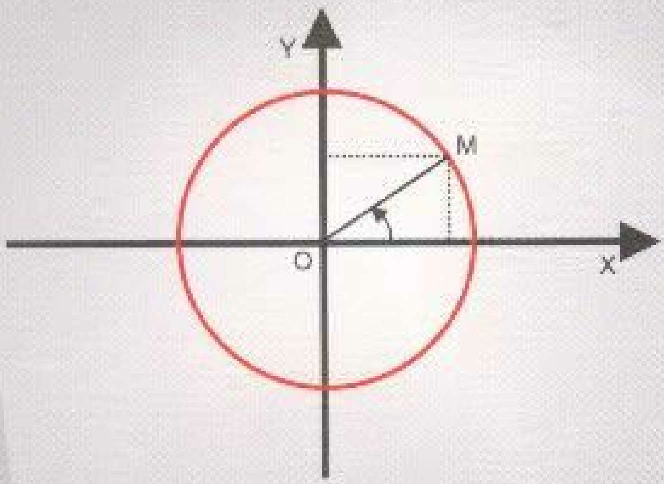
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

# GIẢI BÀI TẬP
# ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH
# 11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

# *Giải bài tập*
# ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

*Đơn vị liên kết :*
Công ty Sách hoa hồng

# Lời nói đầu

*Quyển* ***GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11*** *này được biên soạn với nội dung được trình bày như sau:*

– ***Tóm tắt giáo khoa từng bài học.***

– ***Hướng dẫn giải các câu hỏi bài tập và bài tập làm thêm.***

*Với cách biên soạn này, chúng tôi hi vọng quyển sách này là tài liệu tham khảo bổ ích trong quá trình ôn tập, rèn luyện, củng cố kiến thức đồng thời so sánh với kết quả tự làm bài tập của mình.*

*Quý thầy cô và quý phụ huynh có thể xem quyển sách này như tài liệu tham khảo thêm.*

*Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.*

**NHÓM BIÊN SOẠN**

# Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## §1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. ĐỊNH NGHĨA

**1. Hàm số sin và hàm số côsin**

*a) Hàm số sin:* Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực sinx

$$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \sin x$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

*b) Hàm số côsin:* Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực cosx

$$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \cos x.$$

được gọi là hàm số cosin, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.

**2. Hàm số tang và hàm số côtang**

*a) Hàm số tang:* Hàm số **tang** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (\cos x \neq 0)$$

Kí hiệu là $y = \tan x$.

Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

*b) Hàm số côtang:* Hàm số **côtang** là hàm số được xác định bởi công thức $$y = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (\sin x \neq 0)$$

Kí hiệu là $y = \cot x$.

Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

### II. TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$.

Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$.

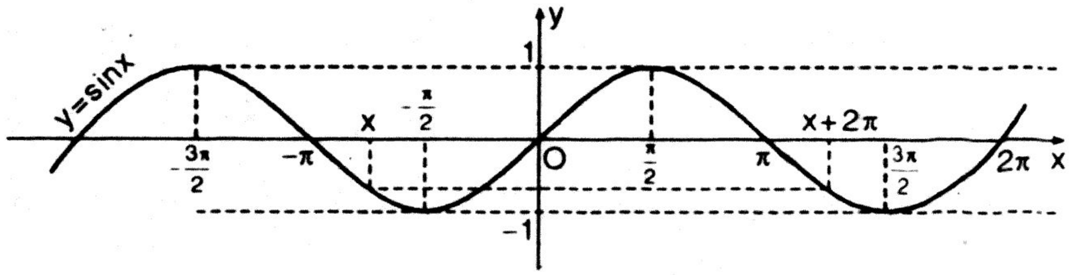
## III. SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### 1. Hàm số y = sinx

- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \le \sin x \le 1$
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$.
- Bảng biến thiên của hàm số y = sinx trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như sau:

| x | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y = sinx | 0 | ↘ | $-1$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 |

- Đồ thị hàm số y = sinx



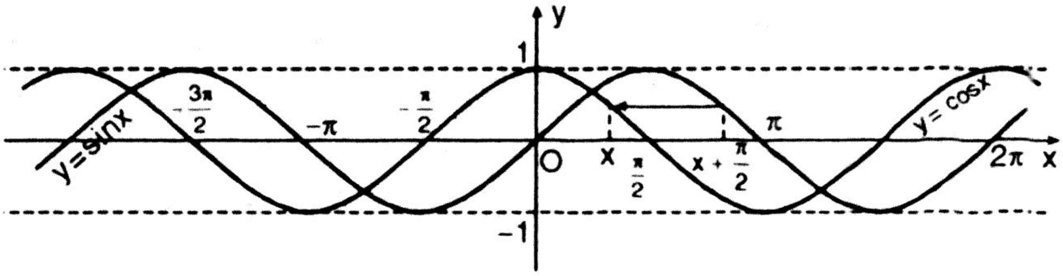
### 2. Hàm số y = cosx

- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \le \cos x \le 1$.
- Là hàm số chẵn.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$.
- Bảng biến thiên của hàm số y = cosx trên đoạn $[-\pi; \pi]$

| x | $-\pi$ | | 0 | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y = cosx | $-1$ | ↗ | 1 | ↘ | $-1$ |

- Đồ thị hàm số y = cosx

Ta có: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ với mọi x, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số y = sinx sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số y = cosx (nó cũng được gọi là đường hình sin).

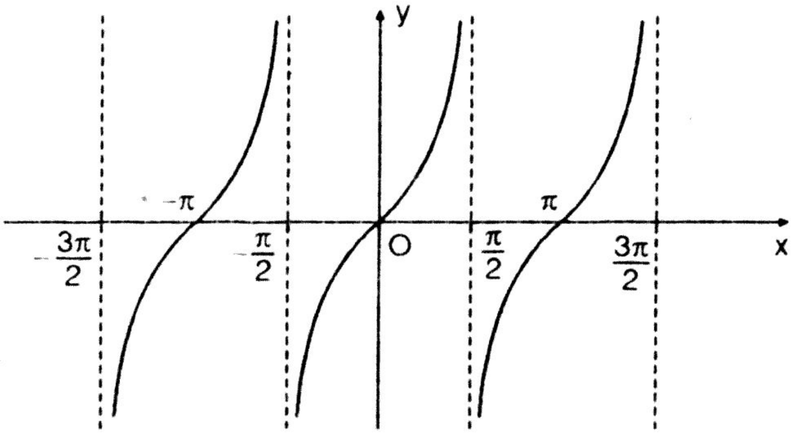


### 3. Hàm số y = tanx

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$.
- Bảng biến thiên của hàm số y = tanx trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

| x | $0$ | | $\dfrac{\pi}{4}$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y = tanx | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Đồ thị của hàm số y = tanx

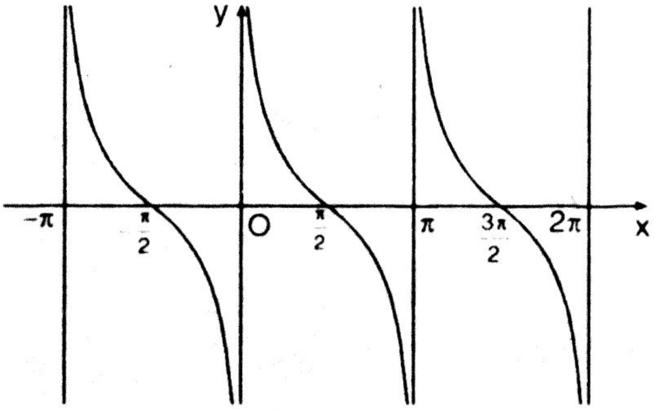


### 4. Hàm số y = cotx

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$.
- Bảng biến thiên của hàm số y = cotx trên $[0; \pi]$
- Sự biến thiên và đồ thị của hàm số y = cotx trên khoảng $(0; \pi)$.

| x | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y = cotx | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- Đồ thị hàm số y = cotx



## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Hãy xác định những giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số y = tanx:

a) Nhận giá trị bằng 0;　　b) Nhận giá trị bằng 1;

c) Nhận giá trị dương;　　d) Nhận giá trị âm.

*Giải*

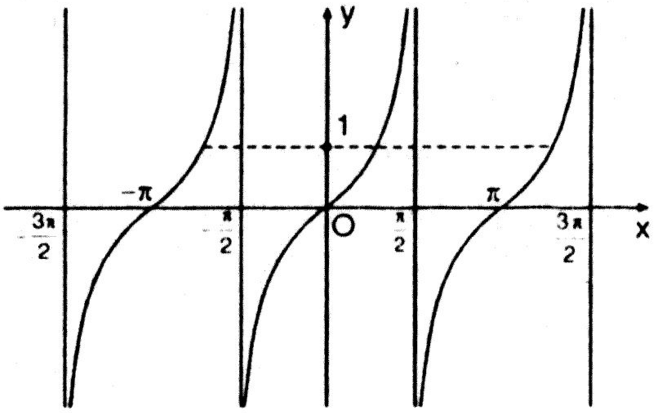
Dựa vào đồ thị của hàm số y = tanx trên $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ta có:

a) tanx = 0 tại $x \in \{-\pi; 0; \pi\}$

b) tanx = 1 tại $x \in \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

c) tanx > 0 khi $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

d) tanx < 0 khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$



**2.** Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$;　b) $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;　c) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;　d) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

**Giải**

a) y xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) Vì $1 + \cos x \geq 0$ nên y xác định khi và chỉ khi:

$$1 - \cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x < 1 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) y xác định khi và chỉ khi $x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) y xác định khi và chỉ khi $x + \dfrac{\pi}{6} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

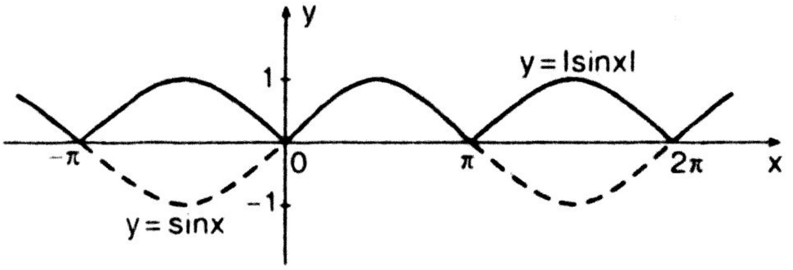
Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

**3.** Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$.

**Giải**

Ta có $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{nếu } \sin x < 0 \end{cases}$, do đó đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ có được từ đồ thị $(C)$ của hàm số $y = \sin x$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị của $(C)$ nằm trong nửa mặt phẳng $y \geq 0$ (tức là nửa mặt phẳng bên trên trục hoành kể cả bờ Ox).
- Lấy hình đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị $(C)$ nằm trong nửa mặt phẳng $y < 0$ (tức là nửa mặt phẳng bên dưới trục hoành không kể bờ Ox);
- Xóa phần đồ thị của $(C)$ nằm trong nửa mặt phẳng $y < 0$
- Đồ thị $y = |\sin x|$ là đường liền nét trong hình dưới đây:

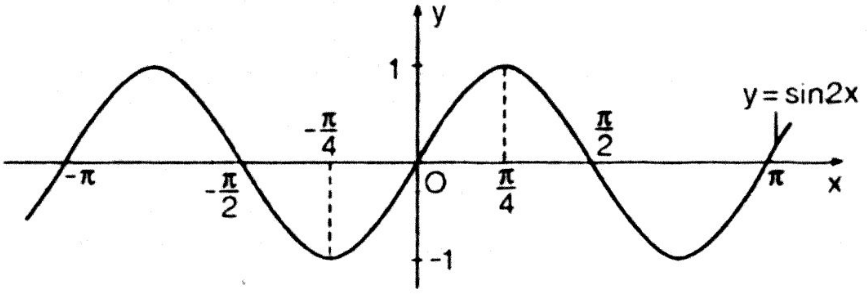


**4.** Chứng minh rằng $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$.

**Giải**

Ta có $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + 2k\pi) = \sin 2x,\ k \in \mathbb{Z}$.

Hàm số y = sin2x là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$ và y = sin2x là hàm số lẻ nên ta vẽ đồ thị của y = sin2x trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ rồi lấy đối xứng qua O, được đồ thị trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Cuối cùng tịnh tiến song song với trục Ox các đoạn độ dài $\pi$ ta được đồ thị hàm số y = sin2x trên $\mathbb{R}$.

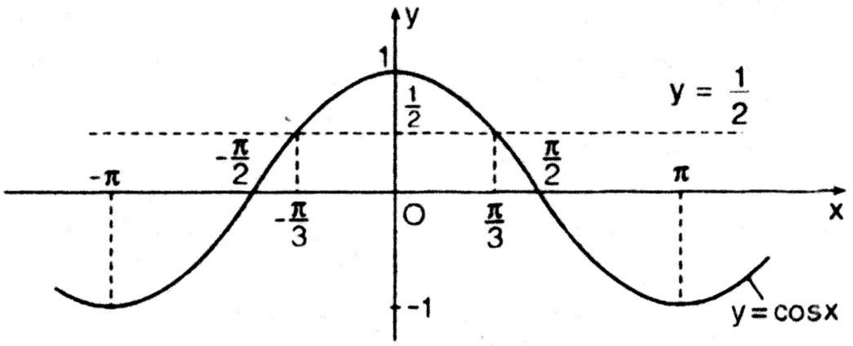


**5.** Dựa vào đồ thị hàm số y = cosx, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$.

### *Giải*

Đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số y = cosx tại các giao điểm có hoành độ tương ứng là $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

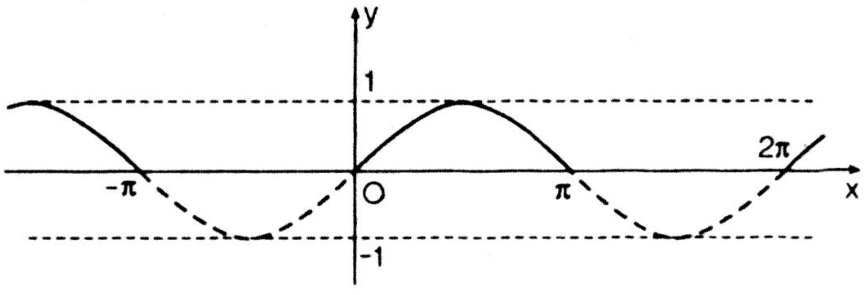
Do đó $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



**6.** Dựa vào đồ thị của hàm số y = sinx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

### *Giải*

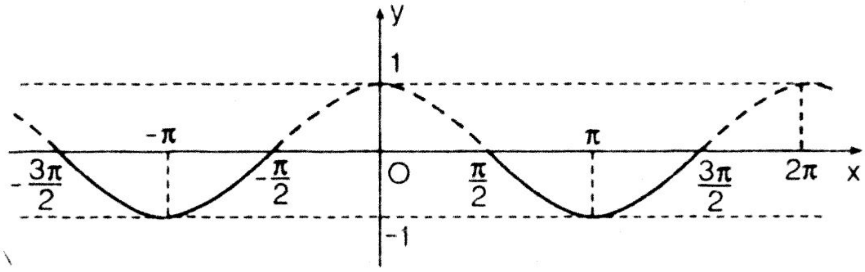
Ta có sinx > 0 ứng với phần đồ thị nằm phía trên trục Ox. Vậy đó là các khoảng $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ là các khoảng giá trị của x để sinx > 0.



**7** Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

*Giải*

Ta có $\cos x < 0$ ứng với phần đồ thị nằm phía dưới trục Ox. Đó là các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.



**8** Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$; b) $y = 3 - 2\sin x$.

*Giải*

a) Ta có $\cos x \le 1 \Rightarrow y \le 3$. Vậy $\max y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Vì $\sin x \ge -1 \Rightarrow -\sin x \le 1 \Rightarrow y \le 5$.

Vậy $\max y = 5 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$; b) $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$;

c) $y = \cot x\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$; d) $y = 5\tan x\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

ĐS: a) $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$; b) $x \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi$;

c) $x \ne -\frac{\pi}{3} + k\pi$; d) $x \ne \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

**2.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin^4 2x$; b) $y = \frac{\cos x \sin x}{\tan x + \cot x}$;

c) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$; d) $y = \sin x - \cos x$.

ĐS: a) Hàm số chẵn; b) Hàm số chẵn;

c) Hàm số chẵn; d) Hàm số không chẵn không lẻ.

**3.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

a) $y = -5\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;  b) $y = \sqrt{1+2\cos x} - 3$

ĐS: a) $-4$; $6$;  b) $-3$; $\sqrt{3} - 3$.

**4.** Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \cos 2x$ và $y = |\cos 2x|$.

**5.** Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 1 - \sin x$;  b) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;  d) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

# §2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. Phương trình sinx = a

$|a| > 1$: phương trình vô nghiệm.

$|a| \le 1$: gọi $\alpha$ là cung thỏa $\sin\alpha = a$

Ta có $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{ll} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.}$

*Chú ý:* Nếu $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$.

### 2. Phương trình cosx = a

$|a| > 1$: phương trình vô nghiệm.

$|a| \le 1$: gọi $\alpha$ là cung thỏa $\text{cox}\alpha = a$

Ta có $\cos x = \text{cox}\alpha \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$

*Chú ý:* Nếu $\alpha \in [0, \pi]$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$.

### 3. Phương trình tanx = a

Gọi $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\tan\alpha = a$, ta viết $\alpha = \arctan a$

Ta có $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

### 4. Phương trình cotx = a

Gọi $\alpha \in (0; \pi)$ thỏa $\cot\alpha = a$, ta viết $\alpha = \text{arccot}\, a$

Ta có $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Giải các phương trình:

a) $\sin(x+2) = \frac{1}{3}$;

b) $\sin 3x = 1$;

c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

d) $\sin(2x + 20^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

### *Giải*

a) Ta có $\sin(x+2) = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \\ x + 2 = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{3} - 2 + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} - 2 + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\frac{3\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin(2x + 20^{0}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(2x + 20^{0}) = \sin(-60^{0})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 20^{0} = -60^{0} + k360^{0} \\ 2x + 20^{0} = 180^{0} - \left(-60^{0}\right) + k360^{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -40^{0} + k180^{0} \\ x = 110^{0} + k180^{0} \end{array}\right.$$

**2.** Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

### *Giải*

Ta có $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

**3.** Giải các phương trình:

a) $\cos(x-1) = \frac{2}{3}$;

b) $\cos 3x = \cos 12^{\circ}$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$.

### *Giải*

a) $\cos(x-1)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x-1=\pm\arccos\frac{2}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=1\pm\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b) $\cos3x=\cos12^0\Leftrightarrow 3x=\pm12^\circ+k360^\circ\Leftrightarrow x=\pm4^\circ+k120^\circ$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}\\ x=-\frac{5\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}\end{array}\right.\ k\in\mathbb{Z}$$

d) $\cos^2 2x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1+\cos4x}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos4x=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\cos4x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow4x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

**4.** Giải phương trình: $\frac{2\cos2x}{1-\sin2x}=0$.

### *Giải*

Điều kiện: $\sin2x\neq1\Leftrightarrow2x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $\frac{2\cos2x}{1-\sin2x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \cos2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\\ 2x=\pm\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

**5.** Giải các phương trình:

a) $\tan(x-15^o)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$;

c) $\cos2x\tan x=0$;

d) $\sin3x\cot x=0$.

### *Giải*

a) $\tan(x-15^0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\tan(x-15^0)=\tan30^0$

$$\Leftrightarrow x-15^0=30^0+k180^0\Leftrightarrow x=45^0+k180^0,\ k\in\mathbb{Z}$$

b) $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\cot(3x-1)=\cot(-\frac{\pi}{6})$

$$\Leftrightarrow3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

c) Điều kiện: $\cos x\neq0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$\cos 2x.\tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

d) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

$$\sin 3x.\cot x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cot x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{3}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

**6.** Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ và $y = \tan 2x$ bằng nhau?

*Giải*

$$\text{Điều kiện}\left\{\begin{array}{l}x - \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + l\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + l\dfrac{\pi}{2}, (l \in \mathbb{Z})$$

Ta có $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

**7.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0$; b) $\tan 3x \tan x = 1$.

*Giải*

a) $\sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \cos 5x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = \dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi\\ 5x = -\dfrac{\pi}{2} + 3x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4}\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\cos 3x \neq 0$; $\cos x \neq 0$

$$\tan 3x \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Leftrightarrow \tan 3x = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Giải các phương trình

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos(x + 1) = \frac{1}{5}$

c) $\cos(2x + 50^0) = \frac{1}{2}$;　　d) $(1 + 2\cos x)(3 - 2\cos x) = 0$

**ĐS:** a) $x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$; $x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$;　　b) $x = -1 \pm \arccos\frac{1}{5} + k2\pi$

c) $x = 5^0 + k180^0$; $x = -55^0 + k180^0$;　　d) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

**2.** Giải các phương trình:

a) $\frac{\sin 3x}{1 - \cos 3x} = 0$;　　b) $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;　　c) $(\cot x + 1)\sin 3x = 0$

**ĐS:** a) $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$;

b) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$;

c) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

**3.** Giải các phương trình lượng giác:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　b) $\left|\sin\frac{3x}{5}\right| = 1$;

c) $\sqrt{3}\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -3$;　　d) $\tan^2 4x \tan^2 3x = 1$.

### *Hướng dẫn*

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{19\pi}{60} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{11\pi}{60} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

b) $\left|\sin\frac{3x}{5}\right| = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{5\pi}{3}$

c) $x = k\frac{\pi}{2}$

d) $\tan^2 4x = \cot^2 3x \Leftrightarrow \tan^2 4x = \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{7}$.

# §3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- **Phương trình bậc nhất** đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at + b = 0\ (a \neq 0)$ (1)

  trong đó a, b là các hằng số, t là một trong các biểu thức sinx, cosx, tanx hoặc cotx.

- *Cách giải:* Chuyển vế rồi chia hai vế của phương trình (1) cho a ta đưa phương trình (1) về phương trình lượng giác cơ bản.

### II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- **Phương trình bậc hai** đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $at^2 + bt + c = 0\ (a \neq 0)$

  trong đó a, b, c là các hằng số và t là một trong các biểu thức sinx, cosx, tanx hoặc cotx.

- *Cách giải:* Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

### III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

$$a\sin x + b\cos x = c\ (1)\ (a^2 + b^2 \neq 0)$$

**a) Cách giải thứ nhất:** Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ thì $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$

Đưa phương trình về dạng:

$$\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ hay } \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Điều kiện có nghiệm: $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$

Gọi α là cung sao cho $\cos\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ta có: $\cos(x - \varphi) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \varphi \pm \alpha + k2\pi$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3004

**b) Cách giải thứ hai:** Dùng ẩn phụ $t = \tan\frac{x}{2}$ $(x \neq \pi + k2\pi)$

Trước hết xem $x = \pi + k2\pi$ có là nghiệm không. Nếu có ta nhận đó là một nghiệm. Nếu $x = \pi + k2\pi$ không là nghiệm thì đặt $t = \tan\frac{x}{2}$.

Áp dụng công thức: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Đưa phương trình về dạng: $(c + a)t^2 - 2bt + c - a = 0$

Nếu $a + c = 0$. Giải phương trình cơ bản $\tan\frac{x}{2} = \frac{c}{b}$

Nếu $c + a \neq 0$, $\Delta' = a^2 + b^2 + c^2$

Nếu $\Delta' \geq 0$ tức $a^2 + b^2 \geq c^2$ phương trình có nghiệm $t_1$ và $t_2$.

Giải phương trình cơ bản $\tan\frac{x}{2} = t_1$; $\tan\frac{x}{2} = t_2$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Giải phương trình: $\sin^2x - \sin x = 0$.

*Giải*

$$\sin^2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**2.** Giải các phương trình:

a) $2\cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$.

*Giải*

a) Đặt $t = \cos x$; $-1 \leq t \leq 1$

$$\text{Ta có } 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \sqrt{2}\cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\frac{\pi}{2}.\\ x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi.\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**3.** Giải các phương trình:

a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$;

b) $8\cos^2x + 2\sin x - 7 = 0$;

c) $2\tan^2x + 3\tan x + 1 = 0$;

d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$.

*Giải*

a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 1 \\ \cos\frac{x}{2} = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k2\pi \Leftrightarrow x = k4\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow 8(1 - \sin^2 x) + 2\sin x - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi;\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi. \end{array}\right.$

d) Đặt $t = \tan x$ ta có phương trình $t - \frac{2}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**4.** Giải các phương trình:

a) $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$; b) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$; d) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$.

*Giải*

a) Ta có với $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$ nên giá trị x mà $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ được

$$2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có với cosx = 0 thì $\sin^2 x = 1$ nên giá trị x mà cosx = 0 không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được $3\tan^2 x - 4\tan x + 5 = 2(1 + \tan^2 x)$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan 3 + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Ta có với $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

Giá trị x mà cox = 0 không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$2\tan^2 x + 4\tan x - 4 = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan(-5) + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) $$2\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 4\sin^2 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi.\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**5.** Giải các phương trình

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$;

b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$;

c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$;

d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$.

### *Giải*

a) Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$ ta được:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi.\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi\\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi.\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ ta được

$$\frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x\cos\alpha - \sin\alpha\cos 3x = 1$$

(trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin\alpha = \frac{4}{5}$)

Ta có: $\sin(3x - \alpha) = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ta được

$$\frac{5}{13}\cos 2x + \frac{12}{13}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x\cos\alpha + \sin 2x\sin\alpha = 1$$

(trong đó $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ và $\sin\alpha = \frac{12}{13}$)

Ta có: $\cos(2x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow 2x - \alpha = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**6.** Giải các phương trình sau:

a) $\tan(2x + 1)\tan(3x - 1) = 1$;

b) $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

### Giải

a) Điều kiện $\cos(2x + 1) \neq 0, \cos(3x - 1) \neq 0$

$\tan(2x + 1)\tan(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x + 1)\sin(3x - 1) = \cos(2x + 1)\cos(3x - 1)$

$\Leftrightarrow \cos(2x + 1)\cos(3x - 1) - \sin(2x + 1)\sin(3x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left[(2x + 1) + (3x - 1)\right] = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

b) Điều kiện $\cos x \neq 0; \cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$

$\tan x + \tan(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \tan x + \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 1$

$\Leftrightarrow \tan x - \tan^2 x + \tan x + 1 = 1 - \tan x \Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x = 0$

$$\tan x(\tan x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \arctan 3 + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Giải các phương trình sau:

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;

b) $\cos 2x + 3\sin x = 2$;

c) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

d) $\tan^3 x - 3\tan^2 x - 2\tan x + 4 = 0$.

### *Hướng dẫn*

a) Đặt $t = \sin x$; $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{1}{3}$;

b) Đặt $t = \sin x$; $t = 1$; $t = \frac{1}{2}$

c) Đặt $t = \cos x$; $t = 0$; $t = -\frac{1}{2}$;

d) Đặt $t = \tan x$; $t = 1$; $t = 1 \pm\sqrt{5}$

**2.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + 4(\tan x + \cot x) - 1 = 0$;

b) $2\cos^2\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$;

c) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

### *Hướng dẫn*

a) Áp dụng công thức: $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, đặt $t = \tan x + \cot x$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Đặt $t = \cos\frac{4x}{5}$ $(|t| \le 1)$.

Áp dụng công thức nhân đôi và nhân ba ta được:

$4t^2 - 6t^2 - 3t + 5 = 0$ có nghiệm $t = 1$

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

Đặt $t = \sin^2 2x$ $(0 \le t \le 1)$.

**3.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 7x$;

b) $\sin x + \cos x = \cos 2x$;

c) $1 + \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$;

d) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

### *Hướng dẫn*

a) Áp dụng kết quả: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) Áp dụng công thức nhân đôi: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Đưa phương trình về tích: $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$

c) Đưa về tích: $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0$

d) Đưa về tích $(\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0$

# ÔN TẬP CHƯƠNG I

**1.** a) Hàm số $y = \cos 3x$ có phải là hàm số chẵn không? Tại sao?

b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ có phải là hàm số lẻ không? Tại sao?

*Giải*

a) $f(x) = \cos 3x$ là hàm số chẵn vì hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$

và $f(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{5})$, không là hàm số lẻ

vì $f(-\frac{\pi}{5}) = \tan 0 \neq -f(\frac{\pi}{5}) = -\tan\frac{2\pi}{5}$

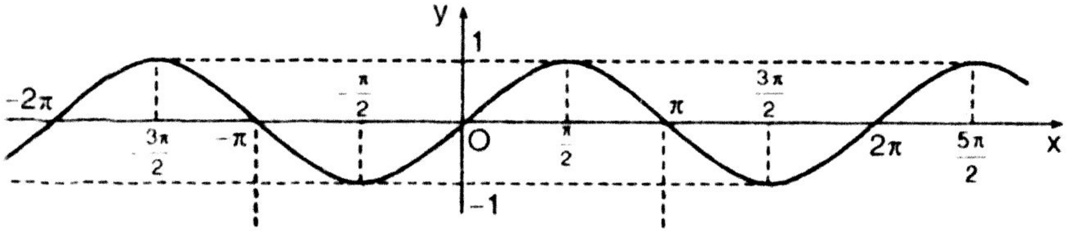
**2.** Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm những giá trị của $x$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ để cho hàm số đó:

a) Nhận giá trị bằng $-1$;

b) Nhận giá trị âm.

*Giải*

a) Đồ thị hàm số $y = \sin x$



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;

a) Ta có $\sin x = -1$ tại $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$;

b) $\sin x < 0$ khi $x \in (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$.

**3.** Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số

a) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$;

b) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

### *Giải*

a) Ta có $\cos x \le 1 \Rightarrow y = \sqrt{2(1+\cos x)} + 1 \le 3$

$\Rightarrow \max y = 3$ khi $\cos x = 1$, tức $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Vì $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Rightarrow y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \le 1$

$\Rightarrow \max y = 1$ khi $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, tức $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**4.** Giải các phương trình:

a) $\sin(x+1) = \frac{2}{3}$;

b) $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$;

c) $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$;

d) $\tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$.

### *Giải*

a) $\sin(x+1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \\ x + 1 = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \\ x = -1 + \pi - \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cot^2\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cot\frac{x}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + 12x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 12x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{144} + k\frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$.

**5.** Giải các phương trình:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25$;

c) $2\sin x + \cos x = 1$;

d) $\sin x + 1{,}5\cot x = 0$.

*Giải*

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$

b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25$

$\Leftrightarrow 25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow 16\cos^2 x + 30\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(15\sin x - 8\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \tan x = \dfrac{8}{15}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \arctan\dfrac{8}{15} + k\pi.\end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ta được

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Đặt $\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$ ta có phương trình:

$$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x - \alpha = \alpha + k2\pi\\ x - \alpha = -\alpha + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\alpha + k2\pi\\ x = k2\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

$$\sin x + 1{,}5\cot x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \frac{3}{2}.\frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos x = 2 \ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

# TRẢ LỜI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

*Chọn phương án đúng:*

**6.** Phương trình cosx = sinx có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là:

(A) 2; (B) 4; (C) 5; (D) 6.

### *Trả lời*

$$\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Vì $x \in [-\pi; \pi]$ nên chọn $k = -1$; $k = 0$. Chọn (A).

**7.** Phương trình $\dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.

### *Trả lời*

Điều kiện $\cos 2x \neq 0$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \ \text{(loại)} \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ là $x_1 = \frac{\pi}{12}$; $x_2 = \frac{5\pi}{12}$. Chọn (A).

**8.** Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là:

(A) $\frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{2\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{4}$; (D) $\frac{\pi}{3}$.

### *Trả lời*

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin x(1 + 2\cos x) = \cos x(1 + 2\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \frac{\pi}{4}$. Chọn (C).

**9.** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình:

$2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là:

(A) $-\frac{\pi}{3}$; (B) $-\frac{\pi}{4}$; (C) $-\frac{\pi}{6}$; (D) $-\frac{5\pi}{6}$

### Trả lời

$$2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right) + k\pi\end{array}\right.$$

Nghiệm âm lớn nhất là $x = -\dfrac{\pi}{4}$. Chọn (B).

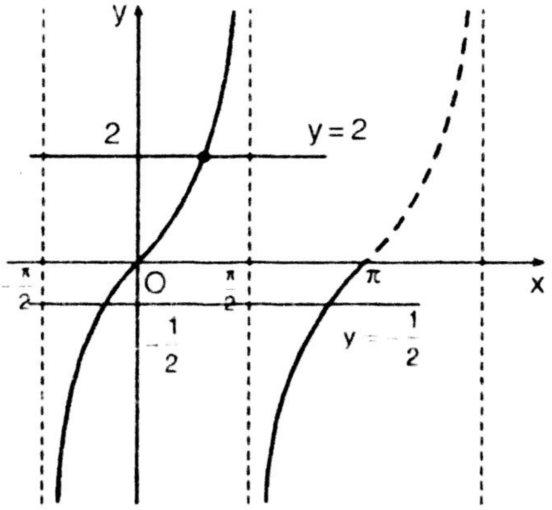
**10** Phương trình $2\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ là:

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

### Trả lời

$$2\tan x - 2\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\tan x - \frac{2}{\tan x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 2\\ \tan x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, đường thẳng $y = 2$ ất đồ thị tại một điểm có hoành độ thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ ất đồ thị tại hai điểm có hoành độ thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. Chọn (C).

# Chương II TỔ HỢP – XÁC SUẤT

## §1. QUY TẮC ĐẾM

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

#### I. QUY TẮC CỘNG

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất, thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn và $A \cap B = \varnothing$ thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

*Chú ý:* Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động.

#### II. QUY TẮC NHÂN

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có m.n cách hoàn thành công việc.

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

a) Một chữ số? b) Hai chữ số? c) Hai chữ số khác nhau?

*Giải*

a) Có 4 số tự nhiên gồm một chữ số lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4.

b) Số có 2 chữ số có dạng $\overline{ab}$

a có 4 cách chọn, b có 4 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có 4.4 = 16 số.

c) Số có 2 chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $a \neq b$

a có 4 cách chọn, b có 3 cách chọn (vì $b \neq a$). Vậy theo quy tắc nhân số các số cần tìm là 4.3 = 12 số.

**2.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100?

*Giải*

Số tự nhiên là hơn 100 là số có 1 chữ số hoặc có 2 chữ số.

Có 6 số có một chữ số lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6

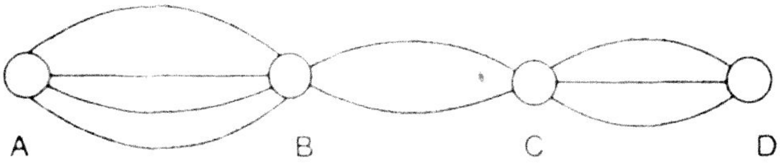
Có $6^2$ số có loại chữ số lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6

Vậy số các số cần tìm là $6 + 6^2 = 42$ số.

**3.** Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các đoạn đường như hình vẽ. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D, qua B và C chỉ một lần?

b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



### *Giải*

a) Từ A đến B có 4 con đường, từ B đến C có 2 con đường, từ C đến D có 3 con đường.

Theo quy tắc nhân từ A đi đến D, qua B và C chỉ một lần có:

$$4.2.3 = 24 \text{ (cách)}.$$

b) Số cách đi từ A đến D rồi trở về A là: $4.2.3.3.2.4 = 24^2 = 576$ (cách).

**4.** Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và bốn kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

### *Giải*

Theo quy tắc nhân, số các cách chọn một chiếc đồng hồ là:

$$3.4 = 12 \text{ (cách)}.$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số?

ĐS: Có $4.7.6 = 168$ số

**2.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều là chẵn?

ĐS: Có $5.4 = 20$ số

**3.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5?

ĐS: Có $2.9.10^4 = 180.000$ số

**4.** Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. Không có con đường nào nối thành phố B với thành phố C. Hỏi có tất cả bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D.

ĐS: 12 con đường

# §2. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. HOÁN VỊ

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n > 1$). Khi sắp xếp phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

*Định lí 1:* Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là:

$$\boxed{P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots2.1}$$

### 2. CHỈNH HỢP

a) Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).

b) *Định lí 2:* Số chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \le k \le n$)

là: $$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Quy ước $0! = 1$, và $A_n^0 = 1$

### 3. TỔ HỢP

a) Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

b) *Định lí 3:* Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \le k \le n$)

là: $$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

### 4. HAI TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA SỐ $C_n^k$

a) *Tính chất 1:* Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$.

Khi đó: $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$

*b) Tính chất 2* (hằng đẳng thức Pa-xcan):

Cho các số nguyên dương n và k với $1 \le k \le n$

Khi đó: $\boxed{C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}}$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

   a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432 000?

*Giải*

a) Mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 là một hoán vị của 6 số. Vậy có $6! = 720$ số.

b) Trong 6 số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Vậy có $\frac{6!}{2} = 360$ số chẵn và 360 số lẻ trong 720 số có 6 chữ số khác nhau.

c) Giả sử số cần tìm có dạng $\overline{abcdef}$ là các số trong câu a bé hơn 432.000

* *Trường hợp 1:* $a < 4$: a có 3 cách chọn $a \in \{1, 2, 3\}$

$\overline{bcdef}$ có $5! = 120$ cách chọn là số hoán vị của 5 phần tử 1; 2; 3; 4; 5; 6 trừ số a.

Vậy theo quy tắc nhân trường hợp này có $3.5! = 360$ số.

* *Trường hợp 2:* $a = 4$, $b < 3$

b có 2 cách chọn $b \in \{1, 2\}$ tiếp theo có 4!

Cách chọn $\overline{cdef}$. Vậy theo quy tắc nhân có $2.4! = 48$ số

* *Trường hợp 3:* $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$

Trường hợp này có 3! cách chọn số $\overline{def}$.

Vậy số các số thỏa yêu cầu là: $360 + 48 + 6 = 414$ số

**2.** Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho mười khách vào mười ghế xếp thành dãy?

*Giải*

Mỗi cách sắp xếp chỗ ngồi của 10 người khách vào 10 ghế kê thành một dãy là một hoán vị của 10 phần tử và có 10! cách sắp xếp.

**3.** Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba cái lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba cái lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

*Giải*

Vì bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ cắm hoa khác nhau nên mỗi lần chọn ra ba bông hoa để cắm vào ba lọ ta có một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Vậy số cách cắm hoa bằng số các chỉnh hợp chập 3 của 7 (bông hoa).

Vậy có: $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 210$ cách cắm hoa

**4.** Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

*Giải*

Có $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$ cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn chọn từ 6 bóng khác nhau.

**5.** Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 cái lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:

a) Các bông hoa khác nhau?

b) Các bông hoa như nhau?

### *Giải*

a) Mỗi cách cắm là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử.

Vậy có $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ (cách cắm).

b) Nếu các bông hoa là như nhau thì mỗi cách cắm là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử. Vậy có $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ (cách cắm).

**6.** Trong mặt phẳng, cho sáu điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

### *Giải*

Số tam giác là số tổ hợp chập 3 của 6 phần tử. Vậy số tam giác là

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

**7.** Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ 4 đường thẳng song song với nhau và 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường thẳng song song đó?

### *Giải*

Chọn hai đường thẳng từ bốn đường thẳng song song với nhau, ta có $C_4^2$ cách chọn.

Chọn hai đường thẳng từ 5 đường thẳng vuông góc với bốn đường thẳng song song ở trên ta có $C_5^2$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân số hình chữ nhật là: $C_4^2.C_5^2 = 60$ (hình chữ nhật).

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** a) Tìm tổng tất cả các số có 3 chữ số 1, 2, 3 (không có chữ số nào trùng nhau).

b) Tìm tổng tất cả các số có 4 chữ số khác nhau 1, 3, 5, 7.

### *Hướng dẫn*

a) Có 6 số là hoán vị của 1, 2, 3; S = 1332

b) Tương tự.

**2.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần?

*Hướng dẫn*

Xét 8 chữ số $0, 1_a, 1_b, 1_c, 2, 3, 4, 5$.

Có $8! - 7! = 7.7!$ số có 8 chữ số nếu xem $1_a, 1_b, 1_c$ là khác nhau đôi một.

Nhưng vì $1_a = 1_b = 1_c = 1$ nên số các số trên giảm $3! = 6$ lần.

ĐS: $\frac{7.7!}{3!} = 5880$ số.

**3.** Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

*Hướng dẫn*

Số có dạng $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$

Với $a = 5$ có $A_6^4$ số

Với $a \neq 0$ có $4.5\,A_{10}^6$ cách chọn

Vậy có $A_{10}^6 + 20\,A_{10}^6 = 1560$ số

**4.** Trong không gian cho 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với các đỉnh là các điểm đã cho.

ĐS: $C_9^4 = 126$

**5.** Một nhóm học sinh gồm 9 nam và 3 nữ. Giáo viên muốn chọn 4 học sinh để trực. Có bao nhiêu cách chọn nếu:

A) Chọn học sinh nào cũng được; B) Chọn đúng một nữ;

C) Chọn ít nhất một nữ.

ĐS: a) $C_{12}^4 = 495$; b) $C_3^1.C_9^3 = 252$; c) 369

# §3. NHỊ THỨC NIU-TƠN (NEWTON)

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k}$$

### II. TAM GIÁC PA-XCAN (PASCAL)

Muốn khai triển $(a+b)^n$ thành đa thức, ta cần biết $n+1$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Ta có thể tìm được chúng bằng cách sử dụng bảng số sau đây:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

……

Tam giác Pa-xcan được lập theo quy luật sau:

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n ($n \geq 1$) thì hàng thứ n + 1 tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn:

a) $(a + 2b)^5$; b) $\left(a - \sqrt{2}\right)^6$; c) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

### *Giải*

a) $(a + 2b)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k.a^{5-k}.(2b)^k = a^5 + C_5^1.a^4.(2b)^1 + C_5^2.a^3.(2b)^2 +$

$+ C_5^3.a^2.(2b)^3 + C_5^4.a.(2b)^4 + C_5^5(2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5$

b) $\left(a - \sqrt{2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k a^{6-k}\left(-\sqrt{2}\right)^k$

$= a^6 - 6a^5\sqrt{2} + 15a^4\left(\sqrt{2}\right)^2 - 20a^3\left(\sqrt{2}\right)^3 + 15a^2\left(\sqrt{2}\right)^4 - 6a\left(\sqrt{2}\right)^5 + \left(\sqrt{2}\right)^6$

$= a^6 - 6\sqrt{2}\,a^5 + 30a^4 - 40a^3\sqrt{2} + 60a^2 - 24\sqrt{2}\,a + 8$

c) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k.x^{13-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k.(-1)^k.x^{13-2k}$

**2.** Tìm hệ số của $x^3$ trong khai triển của các biểu thức sau: $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$.

### *Giải*

Ta có $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k.x^{6-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} C_6^k.2^k.\frac{x^{6-k}}{x^{2k}}$

Hệ số của $x^3$ ứng với k sao cho $6 - k = 2k + 3 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy hệ số của $x^3$ trong khai triển là $2.C_6^1 = 12$

**3.** Biết hệ số của $x^2$ trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ là 90, tìm n.

*Giải*

Ta có: $(1 - 3x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.(-3x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.(-3)^k.x^k$

Hệ số của $x^2$ trong khai triển là:

$$C_n^2(-3)^2 = 90 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow n = 5$$

**4.** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của: $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$

*Giải*

Ta có: $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(x^3\right)^{8-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k.\frac{x^{24-3k}}{x^k}$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa: $24 - 3k = k \Leftrightarrow k = 6$

Vậy số hạng không chứa x trong triển khai là $C_8^6 = 3360$.

**5.** Từ khai triển nhị thức $(3x - 4)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

*Giải*

Tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (3x - 4)^{17}$ là $f(1) = (-1)^{17} = -1$.

**6.** Chứng minh rằng:
a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100;
b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10 000;
c) $\sqrt{10}\left[\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100}\right]$ là một số nguyên.

*Giải*

a) Ta có: $11^{10} - 1 = (10 + 1)^{10} - 1 = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k\, 10^k - 1.$

$$= 10.\ C_{10}^1 - \sum_{k=2}^{10} C_{10}^k\, 10^k \text{ chia hết cho } 100$$

vì $10\,C_{10}^1 = 100$ và $\sum_{k=2}^{10} C_{10}^k 10^k : 100$

) Ta có: $101^{100} - 1 = (100 + 1)^{100} - 1 = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k 100^k - 1$

$$= 1 + C_{100}^1.100 + \sum_{k=2}^{100} C_{100}^k 100^k - 1 = 10000 + \sum_{k=2}^{100} C_{100}^k 100^k : 10000$$

c) Ta có: $\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\left(\sqrt{10}\right)^{k}$

$$= \sum_{0\le k=2\ell\le 100}^{100} C_{100}^{2\ell}.10\ell + \sum_{0\le k=2\ell+1\le 100}^{100} C_{100}^{2\ell+1}.10^{\ell}.\sqrt{10}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{50} C_{100}^{2\ell}.10^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{49} C_{100}^{2\ell+1}.10^{\ell}.\sqrt{10} \quad (1)$$

$$\left(1-\sqrt{10}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\left(-\sqrt{10}\right)^{k} = \sum_{\ell=0}^{50} C_{100}^{2\ell}.10^{\ell} - \sum_{\ell=0}^{49} C_{100}^{2\ell+1}.10^{\ell}.\sqrt{10} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100} = 2\sum_{\ell=0}^{49} C_{100}^{2\ell+1}.10^{\ell}.\sqrt{10}$$

Suy ra $\sqrt{10}\left[\left(1+\sqrt{10}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{10}\right)^{100}\right] = 2\sum_{\ell=0}^{49} C_{100}^{2\ell+1}\, 10^{\ell+1} \in \mathbb{Z}.$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Tìm số hạng không chứa x của khai triển $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}$

ĐS: $C_{10}^{2} = 45$

**2.** Tìm số hạng không chứa căn thức trong khai triển $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$

ĐS: $C_5^2 = 10$

**3.** Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^n$ tìm số hạng không chứa x biết:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$$

ĐS: n = 12; $C_{12}^{5} = 792$.

# §4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

**1. Phép thử**

*Phép thử ngẫu nhiên* là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

**2. Không gian mẫu**

Tập hợp mọi kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và kí hiệu là $\Omega$ (đọc là ô-mê-ga).

### II. BIẾN CỐ

*Biến cố* là một tập con của không gian mẫu.

Tập $\varnothing$ được gọi là *biến cố không thể* (gọi tắt là biến cố *không*). Còn tập $\Omega$ được gọi là *biến cố chắc chắn*.

### III. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

- Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử.

  Tập $\Omega \backslash A$ được gọi là *biến cố đối* của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.

- Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có định nghĩa sau:

  Tập $A \cup B$ được gọi là *hợp* của các biến cố A và B.

  Tập $A \cap B$ được gọi là *giao* của các biến cố A và B.

  Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B *xung khắc*.

  Theo định nghĩa, $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra; Biến cố $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra. Biến cố $A \cap B$ còn được viết là A.B.

  A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Gieo một đồng tiền ba lần.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố:

A: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp";

B: "Mặt sấp xảy ra đúng một lần";

C: "Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần".

### *Giải*

a) Gieo một đồng tiền ba lần đều được sấp thì ta viết SSS không gian mẫu là $\Omega$ = {SSS, SSN, NSS, SNS, NNS, NSN, SNN, NNN}.

b) A là biến cố: "Là lần đầu xuất hiện mặt sấp" thì

A = {SSS, SSN, SNS, SNN}.

B là biến cố: "Mặt sấp xảy ra đúng một lần" thì

B = {SNN, NSN, NNS}.

C là biến cố: "Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần" thì

C = {NNN, NNS, SNN, NSN, NSS, SSN, SNS} = $\Omega$\{SSS}.

**2.** Gieo một con súc sắc hai lần.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề:

A = {(6; 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)};

B = {(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)};

C = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}.

### *Giải*

a) Không gian mẫu: $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \le i, j \le 6\}$.

b) A là biến cố "Lần gieo đầu xuất hiện trên mặt 6";

B là biến cố "Tổng số chấm trong hai lần gieo là 8";

C là biến cố "Kết quả hai lần gieo có số chấm bằng nhau".

**3.** Một hộp chứa 4 cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau: A: "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn";

B: "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn".

### *Giải*

a) Không gian mẫu là: $\Omega$ = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}.

b) Biến cố "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn" là A = {(1, 3), (2, 4)};

Biến cố "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn" là

B = {(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)} = $\Omega$\{(1, 3)}.

**4.** Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Kí hiệu $A_k$ là biến cố: "Người thứ k bắn trúng", k = 1, 2.

a) Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố $A_1$, $A_2$:

A: "Không ai bắn trúng";

B: "Cả hai đều bắn trúng";

C: "Có đúng một người bắn trúng";

D: "Có ít nhất một người bắn trúng".

b) Chứng tỏ rằng $A = \overline{D}$; B và C xung khắc.

### Giải

a) $A_1$ là biến cố: "Người thứ nhất bắn trúng"

$A_2$ là biến cố: "Người thứ hai bắn trúng"

Khi đó $\overline{A_1}$ là biến cố: "Người thứ nhất bắn không trúng"

Khi đó $\overline{A_2}$ là biến cố: "Người thứ hai bắn không trúng"

Biến cố: "Không ai bắn trúng" $A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$;

Biến cố: "Cả hai đều bắn trúng" $B = A_1 \cap A_2$;

Biến cố: "Có đúng một người bắn trúng" $C = \left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$;

Biến cố: "Có ít nhất một người bán trúng" $D = A_1 \cup A_2$.

b) $\overline{D}$ là biến cố: "Cả hai người đều bắn không trúng".

Do đó: $\overline{D} = A$. Ta có: $B \cap C = \varnothing$ nên B và C xung khắc.

**5.** Từ một hộp chứa 10 cái thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Kí hiệu A, B, C là các biến cố sau: A: "Lấy được thẻ màu đỏ";
B: "Lấy được thẻ màu trắng";
C: "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập hợp con tương ứng của không gian mẫu.

### Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là biến cố: "Lấy được thẻ màu đỏ";

$B = \{7, 8, 9, 10\}$ là biến cố: "Lấy được thẻ màu trắng";

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ là biến cố: "Lấy được thẻ ghi số chẵn".

**6.** Gieo một đồng tiền liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả bốn lần ngửa thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố: A: "Số lần gieo không vượt quá ba";
B: "Số lần gieo là bốn".

### Giải

a) Không gian mẫu là $\Omega = \{S, NS, NNS, NNNS, NNNN\}$.

b) $A = \{S, NS, NNS\}$ là biến cố: "Số lần gieo không vượt quá ba"

$B = \{NNNS, NNNN\}$ là biến cố: "Số lần gieo là bốn"

**7.** Từ một hộp chứa 5 quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Xây dựng không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau: A: "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước";

B: "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau";

C: "Hai chữ số bằng nhau".

### Giải

a) Vì việc lấy là ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp thứ tự nên mỗi lần lấy, ta được một chỉnh hợp chập 2 của 5 chữ số. Vậy không gian mẫu bao gồm các chỉnh hợp chập 2 của 5 chữ số:

$\Omega = \{12, 21, 13, 31, 14, 41, 15, 51, 23, 32, 24, 42, 25, 52, 34, 43, 35, 53, 45, 54\}$.

b) $A = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\}$ là biến cố: "chữ số sau lớn hơn chữ số trước".

$B = \{21, 42\}$ là biến cố: "chữ số trước gấp đôi chữ số sau".

$C = \varnothing$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Từ một hộp chứa 3 bi trắng, 2 bi đỏ, lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 bi.

a) Xây dựng không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố:

A: "Hai bi cùng màu trắng"; B: "Hai bi cùng màu đỏ";

C: "Hai bi cùng màu"; D: "Hai bi khác màu".

c) Trong các biến cố trên, hãy tìm các biến cố xung khắc, các biến cố đối nhau.

**2.** Gieo một đồng tiền, sau đó gieo một con súc sắc. Quan sát sự xuất hiện mặt sấp (S), mặt ngửa (N) của đồng tiền và số chấm xuất hiện trên con súc sắc.

a) Xây dựng không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Đồng tiền xuất hiện mặt sấp và con súc sắc xuất hiện mặt chẵn chấm";

B: "Đồng tiền xuất hiện mặt ngửa và con súc sắc xuất hiện mặt lẻ chấm";

C: "Mặt 6 chấm xuất hiện";

# §5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

*Định nghĩa:* Giả sử A là một biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ là *xác suất của biến cố A*, kí hiệu là P(A).

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

### II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

*Định lí*

a) $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

b) $0 \le P(A) \le 1$, với mọi biến cố A.

c) Nếu A và B xung khắc, thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (công thức cộng xác suất).

*Hệ quả:* Với mọi biến cố A, ta có: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

### III. CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A.B) = P(A).P(B)$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần.

a) Hãy mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10";

B: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

c) Tính P(A), P(B).

**Giải**

a) Không gian mẫu $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \le i, j \le 6\}$.

b) Biến cố: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10" là $A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$.

Biến cố: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần" là

$B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$.

c) Ta có: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{36} = \dfrac{1}{6}$; $\quad P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.

**2.** Có bốn tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên ba tấm.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên ba tấm bằng 8";

B: "Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp".

c) Tính P(A), P(B).

*Giải*

a) Không gian mẫu $\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$; $n(\Omega) = 4$

b) Biến cố: "Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8" là $A = \{(1, 3, 4)\}$, $n(A) = 1$;

Biến cố: "Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp" là

$$B = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\},\ n(B) = 2$$

c) Ta có: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$; $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

**3.** Một người chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành một đôi.

*Giải*

Ta có 8 chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 8 chiếc giày nên mỗi lần chọn 2 chiếc giày là một tổ hợp chập 2 của 8 phần tử. Vậy số phần tử của không gian mẫu là

$$n(\Omega) = C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

Gọi A là biến cố: "Hai chiếc giày được chọn tạo thành một đôi", ta có $n(A) = 4$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$.

**4.** Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử con súc sắc xuất hiện mặt b chấm, xét phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$. Tính xác suất sao cho:

a) Phương trình có nghiệm;

b) Phương trình vô nghiệm;

c) Phương trình có nghiệm nguyên.

*Giải*

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(\Omega) = 6$.

Phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm $\Delta = b^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow |b| \geq 2\sqrt{2}$

a) Gọi A là biến cố: "Phương trình có nghiệm". Ta có $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $n(A) = 4$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

b) Gọi B là biến cố: "Phương trình vô nghiệm".

Ta có: $B = \overline{A} = \{1, 2\} \Rightarrow n(B) = 2$. Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

c) Lần lượt thay $b = 3$, $b = 4$, $b = 5$, $b = 6$ ta thấy chỉ có $b = 3$ thì phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm nguyên (vì với $b = 4$, $b = 5$, $b = 6$ thì $\Delta$ không là số chính phương nên phương trình không có nghiệm nguyên)

Gọi C là biến cố: "Phương trình có nghiệm nguyên" ta có $C = \{3\}$, do đó $P(C) = \dfrac{1}{6}$.

**5.** Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con, rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn con. Tính xác suất sao cho:

a) Cả bốn con đều là át;
b) Được ít nhất một con át;

c) Được hai con át và hai con K.

### *Giải*

Không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 4 của 52 (con).

Vậy $n(\Omega) = C_{52}^4 = 270\ 725$.

Kí hiệu A, B, C là các biến cố cần tính xác suất tương ứng với các câu a), b), c).

a) Ta có $n(A) = C_4^4 = 1$, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{270725} \approx 0{,}0000037$.

b) Gọi B là biến cố: "Trong bốn con bài rút ra có ít nhất một con Át" thì $\overline{B}$ là biến cố: "Trong bốn con bài rút ra không có con Át nào".

Vì $n(\overline{B}) = C_{48}^4 = 194580$

Nên $P(\overline{B}) = \dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \dfrac{194580}{270725} \approx 0{,}7187$ ; $P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0{,}2813$.

c) $n(C) = C_4^2.C_4^2 = 36$, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{36}{270725} \approx 0{,}000133$.

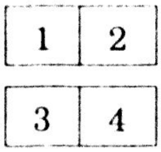
**6.** Hai bạn nam và hai bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

a) Nam, nữ ngồi đối diện nhau;

b) Nữ ngồi đối diện nhau.

### *Giải*

Ta đánh số bốn ghế như hình vẽ.



Kí hiệu A: "Nam, nữ ngồi đối diện nhau",

B: "Nữ ngồi đối diện nhau".

a) Xếp nam ngồi ở ghế ① và ghế ②: Có 2 cách.

Sau đó xếp nữ ngồi ở ghế ③ và ghế ④: Có 2 cách.

Trường hợp này theo quy tắc nhân có $2.2 = 4$ cách

Đổi chỗ cho hai bạn đối diện cho nhau, có 4 cách

Vậy số cách để nam, nữ ngồi đối diện là $4.4 = 16$ cách

Không gian mẫu là hoán vị của 4 phần tử nên $n(\Omega) = 4! = 24$

Xác suất để nam, nữ ngồi đối diện nhau là: $P(A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

b) Vì có 2 nam và 2 nữ xếp vào 4 ghế như hình vẽ nên khi nữ ngồi đối diện nhau thì lập tức nam cũng ngồi đối diện nhau. Mặt khác, các cách xếp chỉ có thể là nam nữ ngồi đối diện hoặc nữ đối diện nhau, hoặc nam đối diện nhau, do đó trong trường hợp này $B = \overline{A}$.

Vậy: $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$.

**7.** Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả trắng, 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu: A là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng";

B là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ hai trắng".

a) Xét xem A và B có độc lập không.

b) Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.

c) Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

### *Giải*

Đánh số các quả cầu trong mỗi hộp từ 1 đến 10 sao cho các quả cầu trắng trong hộp 1 được đánh số từ 1 đến 6 và các quả cầu trắng trong hộp thứ hai được đánh số từ 1 đến 4.

Ta có $\Omega = \{(i, j) | 1 \le i, j \le 10\}$;

$n(\Omega) = 10.10 = 100$

a) Ta có $A = \{(i, j) | 1 \le i \le 6; 1 \le j \le 10\}$;

$B = \{(i, j) | 1 \le i \le 10; 1 \le j \le 4\}$.

$n(A) = 6.10 = 60$; $n(B) = 10.4 = 40$

Từ đó $P(A) = \frac{6.10}{10.10} = \frac{6}{10}$; $P(B) = \frac{10.4}{10.10} = \frac{4}{10}$

$AB = \{(i, j) | 1 \le i \le 6; 1 \le j \le 4\}$; $n(AB) = 6.4 = 24$

$$P(AB) = \frac{6.4}{10.10} = P(A).P(B).$$ Vậy: A và B độc lập.

b) Kí hiệu biến cố C: "Lấy được hai quả cùng màu".

Ta có $C = A.B \cup \overline{A}.\overline{B}$. Do hai biến cố $AB$, $\overline{A}\overline{B}$ xung khắc và A, B là hai biến cố độc lập nên $P(C) = P(AB) + P(\overline{A}\overline{B}) = P(A)P(B) + P(\overline{A})P(\overline{B})$

$$= \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}.$$

c) Do biến cố "Lấy được hai quả khác màu" là $\overline{C}$ nên xác suất cần tìm là

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}.$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Một hộp đựng 10 viên bi trong đó có 6 viên bi màu xanh và 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có:

a) Cả 3 viên đều là bi màu xanh.

b) Ít nhất 1 viên bi là màu xanh.

ĐS: a) $\frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$; b) $1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

**2.** Trong một hộp có 12 bóng đèn giống nhau, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 bóng. Tính xác suất để:

a) Được 3 bóng tốt. b) Được 3 bóng hỏng. c) Được đúng 1 bóng tốt.

ĐS: a) $\frac{C_8^3}{C_{12}^3}$; b) $\frac{C_4^3}{C_{12}^3}$; c) $\frac{C_8^1.C_4^2}{C_{12}^3}$

**3.** Cho hai hộp bi. Hộp thứ nhất có 7 bi xanh và 3 bi đỏ. Hộp thứ hai có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên bi. Tính xác suất để:

1) Được 1 bi xanh và 1 bi đỏ. 2) Được 2 bi đỏ.

3) Được ít nhất 1 bi đỏ.

ĐS: $A_1$: Biến cố lấy ở hộp thứ nhất là đỏ.

$A_2$: Biến cố lấy ở hộp thứ hai là đỏ.

1) $A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$ là biến cố lấy 1 xanh và 1 đỏ

$$P(A) = \frac{3}{10}.\frac{6}{10} + \frac{7}{10}.\frac{4}{10} = \frac{46}{100}$$

2) $P(B) = P(A_1A_2) = \frac{3}{10}.\frac{4}{10} = \frac{12}{100}$

3) $P(A) + P(B) = \frac{58}{100}$

# ÔN TẬP CHƯƠNG II

**1.** Có bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số được tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sao cho:

a) Các chữ số có thể giống nhau?

b) Các chữ số khác nhau?

*Giải*

a) Giả sử số chẵn có bốn chữ số và các chữ số có thể giống nhau là $\overline{abcd}$.

Vì $\overline{abcd}$ chẵn nên d có 4 cách chọn: d ∈ {0, 2, 4, 6}

a có 6 cách chọn: a ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b có 7 cách chọn và c có 7 cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có 6.7.7.4 = 1176 số.

b) * Nếu d = 0 thì $\overline{abc}$ có $A_6^3 = 120$ cách chọn. Số $\overline{abc0}$ với các chữ số khác nhau.

* d ∈ {0, 2, 4, 6}: d có 3 cách chọn

a có 5 cách chọn (vì a ≠ 0 và a ≠ d)

có $A_5^2 = 20$ cách chọn $\overline{bc}$

Theo quy tắc nhân với d ≠ 0 và d chẵn ta có: 3.5.20 = 300 số

Vậy tổng cộng có 120 + 300 = 420 số.

**2.** Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào sáu ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất sao cho:

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau;

b) Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.

*Giải*

Mỗi cách xếp cho ta một hoán vị của 6 phần tử nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6! = 720$

a) Kí hiệu A là biến cố "Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau"

- Nếu nam ngồi đầu bàn thì có 3! cách xếp nam và 3! cách xếp nữ, vậy có 3!.3! cách xếp nam, nữ xen kẽ nhau.
- Tương tự nếu nữ ngồi đầu bàn thì cũng có 3!3! cách xếp nam và nữ xen kẽ nhau

Vậy $n(A) = 2.(3!)^2 = 72$

Suy ra: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{72}{720} = \dfrac{1}{10} = 0,1$

b) Kí hiệu B là biến cố "Ba bạn nam ngồi cạnh nhau"

Ba bạn nam ngồi cạnh nhau thì có 3! cách xếp là hoán vị của ba bạn nam.

Xem ba bạn nam ngồi cạnh nhau là một phần tử thì có 4! cách xếp chung với ba bạn nữ.

Theo quy tắc nhân ta có n(B) = 3!4! = 144

Vậy $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5} = 0,2$

**3.** Từ một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu;

b) Có ít nhất một quả màu trắng.

### *Giải*

Ta có $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

a) Có $C_6^4$ cách chọn bốn quả lấy ra cùng màu trắng và có $C_4^4$ cách chọn bốn quả lấy ra cùng màu đen

Kí hiệu A là biến cố: "Bốn quả lấy ra cùng màu"

Ta có $n(A) = C_6^4 + C_4^4 = 16$

Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$

b) Kí hiệu B là biến cố: "Bốn quả lấy ra có ít nhất một quả màu trắng"

Ta có $n(\overline{B}) = C_4^4 = 1 \Rightarrow n(B) = C_{10}^4 - 1 = 209$. Vậy $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{209}{210}$.

**4.** Gieo một con súc sắc ba lần. Tính xác suất sao cho mặt sáu chấm xuất hiện ít nhất một lần.

### *Giải*

Không gian mẫu $\Omega = \{(i, j, k) \mid 1 \le i, j, k \le 6\}$; $n(\Omega) = 6.6.6 = 216$

Kí hiệu A là biến cố: "Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm":

Khi đó $\overline{A}$: "Không có lần nào xuất hiện mặt 6 chấm".

Ta có: $n(\overline{A}) = 5.5.5. = 125 \Rightarrow n(A) = n(\Omega) - n(\overline{A}) = 91$

Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{91}{216} \approx 0,4213$.

**5.** Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, E, F vào sáu cái thẻ. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ đó là

a) Cạnh của lục giác;

b) Đường chéo của lục giác;

c) Đường chéo nối hai đỉnh đối diện của lục giác.

*Giải*

Không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 2 của 6 (đỉnh), do đó $n(\Omega) = C_6^2 = 15$.

Kí hiệu A, B, C là ba biến cố cần tìm xác suất tương ứng với câu a), b), c).

a) Vì số cạnh của lục giác là 6 nên: $n(A) = 6$, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$;

b) Số đường chéo là: $n(B) = C_6^2 - 6 = 9$.

Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$;

c) Ta có $n(C) = 3$, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

**6.** Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất sao cho:

a) Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn;

b) Tích các số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ.

*Giải*

Không gian mẫu $\Omega = \{(i, j) | 1 \le i, j \le 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6.6 = 36$.

a) A "Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn".

$\Rightarrow \quad A = \{(i, j) | i, j \in \{2, 4, 6\}\} \Rightarrow n(A) = 3.3 = 9$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

b) B: "Tích các số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ"

Ta có $B = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3; 3); (3; 5); (5, 1); (5; 3); (5; 5)\}$

$\Rightarrow \quad n(B) = 9$.

Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

# BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

*Chọn phương án đúng trong các bài tập sau:*

**7.** Lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con. Số cách lấy là

(A) 104; (B) 1326; (C) 450 (D) 2652.

*Trả lời:* Số cách lấy là $C_{52}^2 = 1326$. Chọn (B)

**8.** Năm người được xếp vào ngồi quanh một bàn tròn với năm ghế. Số cách xếp là:

(A) 50; (B) 100; (C) 120 (D) 24.

*Trả lời:* Số cách xếp là $4! = 24$. Chọn (D)

**9.** Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là:

(A) $\frac{12}{36}$; (B) $\frac{11}{36}$; (C) $\frac{6}{36}$ (D) $\frac{8}{36}$.

*Trả lời:* $n(\Omega) = 6.6 = 36$

Biến cố A: "Không xuất hiện mặt sáu chấm.

$n(A) = 5.5 = 25$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Chọn (B)

**10.** Từ một hộp chứa ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen lấy ngẫu nhiên hai quả. Xác suất để lấy được cả hai quả trắng là:

(A) $\frac{9}{30}$; (B) $\frac{12}{30}$; (C) $\frac{10}{30}$ (D) $\frac{6}{30}$.

*Trả lời:* $n(\Omega) = C_5^3 = 10$

Biến cố A: "Lấy được cả hai quả trắng" $n(A) = C_3^2 = 3$

$P(A) = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}$. Chọn (A)

**11.** Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện ba con như nhau là:

(A) $\frac{12}{216}$; (B) $\frac{1}{216}$; (C) $\frac{6}{216}$ (D) $\frac{3}{216}$.

*Trả lời:* $n(\Omega) = 6.6.6 = 216$

$A = \{(i; i; i) \mid i = 1, 2, ..., 6\} \Rightarrow n(A) = 6$

$P(A) = \frac{6}{216}$. Chọn (C)

**12.** Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là:

(A) $\frac{4}{16}$; (B) $\frac{2}{16}$; (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{6}{16}$.

*Trả lời:* $n(\Omega) = 2.2.2.2 = 16$; $n(A) = 1$; $P(A) = \frac{1}{16}$. Chọn (C).

# Chương III. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

## §1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

**I. PHÉP CHỨNG MINH BẰNG QUY NẠP GỒM HAI BƯỚC SAU:**

*Bước 1.* Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

*Bước 2.* Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (giả thiết này được gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

*Chú ý:* Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên đúng với $n = p$, ở bước 2), ta giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Trường hợp thường gặp nhất là $n = 1$.

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có các đẳng thức:

a) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ (1)

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ (2)

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (3)

*Giải*

a) Với $n = 1$, ta có $2 = \dfrac{1.4}{2}$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$ tức là ta có:

$$2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) = \frac{k(3k+1)}{2}$$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh:

$$2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) + (3k + 2) = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

Thật vậy, ta có: $2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) + (3k + 2) = \dfrac{k(3k+1)}{2} + (3k + 2)$

$$= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

Vậy (1) đúng với mọi n = k +1 nên (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Với n = 1, ta có $\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$ (đúng). Vậy (2) đúng với n = 1

Giả sử (2) đúng với n = k tức là ta có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$

Ta chứng minh (2) đúng với n = k + 1 tức là phải chứng minh

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Vậy (2) đúng với n = k + 1 nên (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Với n = 1 ta có $1^2 = \frac{1.2.3}{6}$ (đúng). Vậy (3) đúng với n = 1

Giả sử (3) đúng với n = k thì là ta có: $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Ta chứng minh (3) đúng với n = k + 1 tức là phải chứng minh

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, ta có:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Vậy (3) đúng với n = k + 1 nên (3) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

**2.** Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3 (1) ; b) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 (2) ;

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6 (3).

### *Giải*

a) Đặt $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n$. Với n = 1 ta có $1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9 \vdots 3$.

Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là $S_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$.

Ta chứng minh (1) đúng với n = k +1 tức là chứng minh $S_{k+1} \vdots 3$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1)$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5$

$= k^3 + 3k^2 + 5k + 3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$ (vì $S_k \vdots 3$)

Vậy $S_n \vdots 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Đặt $S_n = 4^n + 15n - 1$.

Với n = 1, ta có $S_1 = 18 \vdots 9$. Vậy (2) đúng với n = 1

Giả sử (2) đúng với n = k, tức là:

$S_k = 4^k + 15k - 1 \vdots 9 \Rightarrow 4^k + 15k - 1 = 9m$ (với $m \in \mathbb{N}^*$.)

Khi đó ta có:

$S_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4.4^k + 15k + 14$

$= 4(9m - 15k + 1) + 15k + 14 = 36m - 45k + 18 = 9(4m - 5k + 2) \vdots 9$

Vậy (2) đúng với n = k + 1 nên (đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.)

c) Đặt $S_n = n^3 + 11n$ với n = 1, ta có $S_1 = 12 \vdots 6$. Vậy (3) đúng với n = 1.

Giả sử (3) đúng với n = k, tức là $S_k = k^3 + 11k \vdots 6$.

Ta phải chứng minh $S_{k+1} \vdots 6$.

Thật vậy: $S_{k+1} = (k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$

$= k^3 + 11k + 3(k^2 + k + 4) \vdots 6$

(Vì $S_k \vdots 6$ và $k^2 + k + 4 = k(k + 1) + 4 \vdots 2$)

Vậy (3) đúng với n = k + 1 nên (3) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

**3.** Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có các bất đẳng thức:

a) $3^n > 3n + 1$ (1) ;        b) $2^{n+1} > 2n + 3$ (2).

### Giải

a) Với n = 2, ta có $3^2 > 3.2 + 1$. (đúng) vậy (1) đúng với n = 2

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2$, tức là $3^k > 3k + 1$   (*)

Ta chứng minh (1) đúng với n = k +1, ta là chứng minh

$$3^{k+1} > 3(k + 1) + 1 \qquad (**)$$

Thật vậy, từ (*) ta có $3^{k+1} = 3.3^k > 3(3k + 1)$

Để có (**) ta chứng minh: $3(3k + 1) > 3(k + 1) + 1 \Leftrightarrow 9k + 3 > 3k + 4$

$\Leftrightarrow 6k > 1$ (luôn đúng với mọi $k \geq 2$)

Vậy (1) đúng với n = k + 1 nên (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

b) Với n = 2 ta có $2^3 > 2.2 + 3$ (đúng). Vậy (2) đúng với n = 2

Giả sử (2) đúng với $n = k \geq 2$, ta có $2^{k+1} > 2k + 3$.

Ta chứng minh (2) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh:

$$2^{k+2} > 2k + 5.$$

Thật vậy ta có: $2^{k+2} = 2.2^{k+1} > 2(2k + 3) = 4k + 6 > 2k + 5$ với mọi $k \geq 2$

Vậy (2) đúng với $n = k + 1$ nên (2) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

**4.** Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính $S_1$, $S_2$, $S_3$.

b) Dự đoán công thức tính tổng $S_n$ và chứng minh bằng quy nạp.

### Giải

a) Ta có: $S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$ ; $S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$ ; $S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$.

b) Dự đoán: $S_n = \frac{n}{n+1}$ (*)

Chứng minh (*) bằng quy nạp với $n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$ ta có $S_1 = \frac{1}{2}$. Vậy (*) đúng với $n = 1$

Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là $S_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

Ta chứng minh (*) đúng với $k + 1$ tức là chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Thật vậy, ta có:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

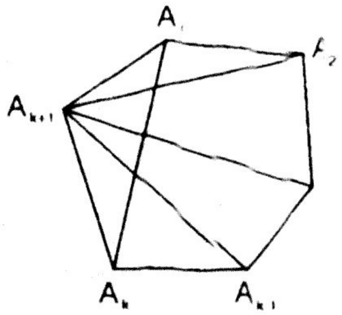
Vậy (*) đúng với $n = k + 1$ nên (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

**5.** Chứng minh số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

### Giải

Với $n = 4$, ta có tứ giác.

Thay $n = 4$ vào công thức, ta có số đường chéo của tứ giác theo công thức là: $\frac{4(4-3)}{2} = 2$.



Vì tứ giác có 2 đường chéo nên công thức là đúng.

Vậy khẳng định là đúng với n = 4.

Giả sử đa giác lồi k cạnh ($k \geq 4$) có số đường chéo là $\dfrac{k(k-3)}{2}$ (giả thiết quy nạp).

Xét đa giác lồi k + 1 cạnh.

Ta phải chứng minh công thức đúng với k + 1, nghĩa là phải chứng minh đa giác lồi k + 1 cạnh có số đường chéo là $\dfrac{(k+1)\left[(k+1)-3\right]}{2}$.

Nối $A_1$ và $A_k$, ta được đa giác k cạnh $A_1A_2...A_k$ có $\dfrac{k(k-3)}{2}$ đường chéo (giả thiết quy nạp).

Nối $A_{k+1}$ với các đỉnh $A_2, A_3, ..., A_{k-1}$, ta được thêm k − 2 đường chéo, ngoài ra $A_1A_k$ cũng là một đường chéo.

Vậy số đường chéo của đa giác k + 1 cạnh là

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)\left[(k+1)-3\right]}{2}.$$

Vậy khẳng định cũng đúng với đa giác k + 1 cạnh.

Do đó số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\dfrac{n(n-3)}{2}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$

1) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$;

2) $1.4 + 2.7 + ... + n(3n + 1)^2 = n(n + 1)^2$

3) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ (với $n \geq 2$);

4) $n^3 + 17n$ chia hết cho 6;

5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$

# §2. DÃY SỐ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. ĐỊNH NGHĨA

**1. Định nghĩa dãy số**

Mỗi hàm số u xác định trên tập số nguyên dương N* được gọi là một *dãy số vô hạn* (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n).$$

Ta thường viết dãy số dưới dạng $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

$u_1$ gọi là *số hạng đầu*, $u_n$ là số hạng tổng quát của dãy số

**2. Định nghĩa dãy số hữu hạn**

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một *dãy số hữu hạn*.

### II. CÁCH CHO DÃY SỐ

- Cho số hạng tổng quát $u_n$ của nó bằng công thức.
- Cho một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.
- Cho bằng phương pháp truy hồi, tức là:
  1) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu)
  2) Cho hệ thức truy hồi tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

### III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

*Định nghĩa*

Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số tăng nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$

Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số giảm nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$

### IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN

a) Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ u_n \le M$

b) Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ u_n \ge m$

c) Dãy số $(u_n)$ được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ m \le u_n \le M$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**a) Xét tính đơn điệu của dãy số:**

1) *Cách 1:* Lập hiệu $u_{n+1} - u_n$

Nếu $u_{n+1} - u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, thì $u_{n+1} > u_n$: $(u_n)$ tăng

Nếu $u_{n+1} - u_n < 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, thì $u_{n+1} < u_n$: $(u_n)$ giảm

2) *Cách 2:* Nếu $u_n > 0$; $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, thì lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$; $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, thì $n_{n+1} > u_n$: $(u_n)$ tăng

Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, thì $n_{n+1} < u_n$: $(u_n)$ giảm

**b) Chứng minh dãy số $(u_n)$ không tăng không giảm:**

Chỉ ra rằng $u_1 < u_2 > u_3$ hoặc $u_1 > u_2 < u_3$.

Thường là dãy số có số hạng $(-1)^n$

**c) Dãy số bị chặn:**

$(u_n)$ bị chặn trên $\Leftrightarrow$ $\exists M$ sao cho $u_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$

$(u_n)$ bị chặn dưới $\Leftrightarrow$ $\exists m$ sao cho $u_n \ge m$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$

$(u_n)$ bị chặn $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ sao cho $|u_n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$

**1.** Viết năm số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát $u_n$ cho bởi công thức:

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$;  b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$;  c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;  d) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

*Giải*

a) $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{2}{3}$; $u_3 = \dfrac{3}{7}$; $u_4 = \dfrac{4}{15}$; $u_5 = \dfrac{5}{31}$

b) $u_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = \dfrac{3}{5}$; $u_3 = \dfrac{7}{9}$; $u_4 = \dfrac{15}{17}$; $u_5 = \dfrac{31}{33}$

c) $u_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{9}{4}$; $u_3 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$; $u_4 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^4$; $u_5 = \left(\dfrac{6}{5}\right)^5$

d) $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $u_3 = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $u_4 = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$; $u_5 = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

**2.** Cho dãy $(u_n)$, biết: $u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \ge 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $u_n = 3n - 4$.

*Giải*

a) $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$, $u_3 = u_2 + 3 = 5$

$u_4 = u_3 + 3 = 8$; $u_5 = u_4 + 3 = 11$

b) Với $n = 1$ ta có $u_1 = 3.1 - 4 = -1$ (đúng)

Giả sử $u_k = 3k - 4$, khi đó: $u_{k+1} = u_k + 3 = (3k - 4) + 3 = 3(k + 1) - 4$.

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$ nên đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

**3.** Dãy số $(u_n)$ cho bởi: $u_1 = 3$; $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$, $n > 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n$ và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

*Giải*

a) $u_1 = 3$, $u_2 = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10}$, $u_3 = \sqrt{1 + 10} = \sqrt{11}$,

$u_4 = \sqrt{1 + 11} = \sqrt{12}$, $u_5 = \sqrt{1 + 12} = \sqrt{13}$.

b) Viết $3 = \sqrt{9}$ và nhận xét

$$\sqrt{9} = \sqrt{1 + 8}$$
$$\sqrt{10} = \sqrt{2 + 8}$$
$$\sqrt{11} = \sqrt{3 + 8}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4 + 8}$$
$$\ldots$$

Dự đoán $u_n = \sqrt{n + 8}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. (1)

Chứng minh công thức (1) bằng quy nạp.

Với $n = 1$, rõ ràng công thức (1) là đúng.

Giả sử đã có $u_k = \sqrt{k + 8}$ với $k \geq 1$.

Theo công thức dãy số, ta có

$$u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{k + 8}\right)^2} = \sqrt{(k + 1) + 8}.$$

Vậy công thức (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, công thức (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

**4.** Xét tính tăng, giảm của các dãy số $(u_n)$, biết:

a) $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$;

b) $u_n = \dfrac{n - 1}{n + 1}$;

c) $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$;

d) $u_n = \dfrac{2n + 1}{5n + 2}$.

### *Giải*

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} + 2 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $(u_n)$ là dãy số giảm.

b) Ta có: $u_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{2}{n+2} - 1 + \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} > 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $(u_n)$ là dãy số tăng.

c) Ta có $u_1 = -3$, $u_2 = 5$, $u_3 = -9$, vì $u_1 < u_2 > u_3$ nên $(u_n)$ là dãy không tăng, không giảm.

d) Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{5n+7} . \frac{5n+2}{2n+1} = \frac{10n^2 + 19n + 6}{10n^2 + 19n + 7} < 1$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $(u_n)$ là dãy số giảm.

**5.** Trong các dãy số $(u_n)$ sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn?

a) $u_n = 2n^2 - 1$;

b) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$;

c) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$;

d) $u_n = \sin n + \cos n$.

### *Giải*

a) Vì $u_n = 2n^2 - 1 \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy $(u_n)$ bị chặn dưới và không bị chặn trên vì khi n lớn vô cùng thì $2n^2 - 1$ cũng lớn vô cùng.

b) Ta có $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vì $n(n + 2) \geq 3$ nên $u_n = \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số $(u_n)$ bị chặn vì $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Với $n \geq 1$ thì $2n^2 - 1 > 0 \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì $2n^2 - 1 \geq 1$, nên $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $0 < u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nếu $(u_n)$ bị chặn.

d) Ta có $|u_n| = \left|\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2} \quad \forall n \in N^*$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}, \forall n \in N^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Viết 4 số hạng đầu của dãy $(a_n)$:

a) $a_n = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$; b) $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$; c) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(a_1 = a_2 = 1)$

**2.** Xét tính đơn điệu của các dãy $(a_n)$:

a) $a_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 1}$; b) $a_n = (-1)^n.\dfrac{1}{n+1}$; c) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$;

d) $a_n = (0,4)^n.n$; e) $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n số 2).

Đáp số: a) Tăng; b) Không tăng, không giảm;
c) Tăng; d) Giảm; e) Tăng.

**3.** Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới của các dãy số:

a) $a_n = \dfrac{5n-3}{5n+3}$; b) $a_n = (-1)^n + \cos n$;

c) $a_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$; d) $n_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$; e) $a_n = (-1)^n\cos\dfrac{\pi}{2n}$

# §3. CẤP SỐ CỘNG

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

Nếu $(u_n)$ là cấp số cộng với công sai d thì $\boxed{u_{n+1} - u_n = d \text{ với } n \in N^*}$ (1)

### II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

*Định lí 1*

Nếu cấp số cộng $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1$ và công sai d thì số hạng tổng quát $u_n$ được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \ge 2$. (2)

## III. TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

*Định lí 2*

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2. \quad (3)$$

## IV. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

*Định lí 3*

Cho cấp số cộng $(u_n)$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

Khi đó $$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}. \quad (4)$$

*Chú ý:* Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức (4) có thể viết

$$\boxed{S_n = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.}$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**a) Chứng minh dãy $(u_n)$ là cấp số cộng**

Ta chứng minh hiệu $u_{n+1} - u_n$ là một hằng số (không phụ thuộc vào n). Khi nó $(u_n)$ là cấp số cộng có công sai $d = u_{n+1} - u_n$.

**b) Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng**

- Xác định $u_1$ và d
- $u_n = u_1 + (n-1)d$
- $u_n - u_n = (n-m)d$

1. Trong các dãy số $(u_n)$ sau đây, dãy nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 5 - 2n$; b) $u_n = \frac{n}{2} - 1$; c) $u_n = 3^n$; d) $u_n = \frac{7-3n}{2}$.

### *Giải*

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = -2$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy $(u_n)$ là cấp số cộng có $u_1 = 3$, công sai $d = -2$.

b) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - 1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy $(u_n)$ là cấp số cộng có $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$

c) $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n = 2.3^n$. Vậy $(u_n)$ không là cấp số cộng.

d) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{7 - 3(n+1)}{2} - \frac{7-3n}{2} = -\frac{3}{2}$.

Vậy $(u_n)$ là cấp số cộng có $u_1 = 2$, công sai $d = -\frac{3}{2}$.

**2.** Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75. \end{cases}$

### Giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

a) Ta có: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$

Vậy $(u_n)$ có $u_1 = 16$, công sai $d = -3$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d - u_1 - 2d = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2 \end{cases}$

**3.** Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng $u_1$, d, n, $u_n$, $S_n$.

a) Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng đó. Cần phải biết ít nhất mấy đại lượng để có thể tìm được các đại lượng còn lại?

b) Lập bảng theo mẫu sau và điền số thích hợp vào ô trống.

| $u_1$ | d | $u_n$ | n | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 55 | 20 | |
| | -4 | | 15 | 120 |
| 3 | $\frac{4}{27}$ | 7 | | |
| | | 17 | 12 | 72 |
| 2 | -5 | | | 205 |

### Giải

a) Các hệ thức liên hiện giữa $u_1$, d, n, $u_n$, $S_n$ là

$$u_n = u_1 + (n - 1)d\ ; \quad S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}\ ; \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}$$

Cần biết ít nhất ba trong năm đại lượng $u_1$, d, n, $u_n$, $S_n$ thì có thể tính được hai đại lượng còn lại.

b) i) Cho $u_1 = -2$, $u_n = 55$, $n = 20$. Tính d và $S_n$

Từ $u_n = u_1 + (n-1)d$. Ta có $55 = -2 + 19d \Rightarrow d = 3$.

$$S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = 10(-2 + 55) = 530$$

ii) Cho $d = -4$, $n = 15$, $S_n = 120$. Tính $u_1$ và $u_n$.

Ta có $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} \Rightarrow 120 = \dfrac{15}{2}[2u_1 + 14.(-4)]$

$$\Rightarrow 240 = 30u_1 - 840 \Rightarrow u_1 = 36$$

Từ đó $u_n = u_1 + (n-1)d = 36 + 14.(-4) = -20$

iii) Cho $u_1 = 3$, $d = \dfrac{4}{27}$; $u_n = 7$. Tìm n và $S_n$.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow 7 = 3 + (n-1).\dfrac{4}{27} \Rightarrow n - 1 = 27 \Rightarrow n = 28$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{28(3+7)}{2} = 140$$

iv) Cho $u_n = 17$, $n = 12$, $S_n = 72$. Tìm $u_1$ và d.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$ và $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$

$$\Rightarrow 72 = \frac{12(u_1 + 17)}{2} \Rightarrow u_1 = -5$$

Từ $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow 17 = -5 + 11d \Rightarrow d = 2$

v) Cho $u_1 = 2$, $d = -5$, $S_n = -205$. Tìm $u_n$ và n.

Ta có $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2} \Rightarrow -205 = \dfrac{n[4 - 5(n-1)]}{2}$

$\Rightarrow n(9 - 5n) = -410 \Rightarrow 5n^2 - 9n - 410 = 0 \Rightarrow n = 10$ (loại $m = -82$)

Từ $u_n = u_1 + (n-1)d$ suy ra $u_n = 2 + 9(-5) = -43$.

**4.** Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của một bậc tùy ý so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

### *Giải*

Ta có 18 cm = 0,18m.

a) Gọi chiều cao của bậc thứ n so với mặt sân là $h_n$, ta có:

$$h_n = 0{,}5 + n.0{,}18.$$

b) Chiều cao mặt sàn tầng hai so với mặt sân là

$$h_{21} = 0{,}5 + 21.0{,}18 = 4{,}28 \text{ (m)}.$$

5. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

### *Giải*

Số tiếng chuông mà đồng hồ đánh từ 0 giờ đến 12 giờ trưa là:

$$S_{12} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78.$$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Xác định $a_1$ và công sai của cấp số cộng $(a_n)$ biết:

a) $\begin{cases} a_3 = -15 \\ a_{14} = 18 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} a_2 - a_3 + a_5 = 10 \\ a_4 + a_6 = 26 \end{cases}$

2. Hãy đặt giữa −6 và 8 sáu số nữa để được cấp số cộng.

### *Hướng dẫn*

Giả sử −6, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$, 8 là cấp số cộng, ta có

$$a_1 = -6,\ a_8 = 8 \Rightarrow d = 2$$

3. Cho cấp số cộng $(a_n)$. Chứng minh rằng:

a) $a_1 + a_p = a_q + a_{p-q+1}$ $(p \geq q)$;

b) $a_p + a_q = a_m + a_n$ nếu $q + p = m + n$

### *Hướng dẫn*

Áp dụng $a_n = a_1 + (n-1)d$

4. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là 40 và tổng bình phương là 480.

### *Hướng dẫn*

Giải hệ: $\begin{cases} (a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 40 \\ (a-2d)^2 + (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 480 \end{cases}$

**Đáp số:** 0, 4, 8, 12, 16, hoặc 16, 12, 8, 4, 0.

5. Cho cấp số cộng $(a_n)$ có $a_4 + a_{11} = 20$. Tính $S_{14}$.

# §4. CẤP SỐ NHÂN

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là *công bội* của cấp số nhân.

Nếu $(u_n)$ là cấp số nhân công bội q thì $\boxed{u_{n+1} = u_n.q \text{ với } n \in N^*}$

### II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

*Định lí 1*

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu $u_1$ và công bội q thì số hạng tổng quát $u_n$ được xác định bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

### III. TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

*Định lí 2*

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \text{ với } k \geq 2 \text{ (hay } |u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}\text{)}.$$

### IV. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

*Định lí 3*

Cho cấp số nhân $(u_n)$ với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Khi đó $$S_n = \frac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

a) Chứng minh $(u_n)$ là cấp số nhân.

Ta chứng minh $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ không phụ thuộc vào n.

b) Xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân $u_n = u_1q^{n-1}$.

**1.** Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{5}.2^n\right), \left(\frac{5}{2^n}\right), \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ là các cấp số nhân.

### Giải

Lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ta có:

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{3}{5}.2^{n+1}\right):\left(\frac{3}{5}.2^{n}\right) = 2 \Rightarrow u_{n+1} = 2.u_n \quad \forall n \in N^*$

$\Rightarrow$ $(u_n)$ là cấp số nhân có công bộ $q = 2$

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{2^{n+1}} : \frac{5}{2^n} = \frac{1}{2}$ $\forall n \in N^*$ $\Rightarrow$ $(u_n)$ là cấp số nhân có công bộ $q = \frac{1}{2}$

c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = -\frac{1}{2}$ $\forall n \in N^* \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân công bộ $q = -\frac{1}{2}$

**2.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với công bội q.

a) Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q.

b) Biết $q = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm $u_1$.

c) Biết $u_1 = 3$, $q = -2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy?

### Giải

Áp dụng: $u_n = q_1.q^{n-1}$.

a) Ta có: $u_6 = u_1.q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{486}{2} = 243 \Rightarrow q = 3$

b) Ta có $u_4 = u_1q^3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{8}{21}.\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{7}$

c) Ta có $u_n = u_1q^{n-1} \Rightarrow 192 = 3.(-2)^{n-1} \Rightarrow (-2)^{n-1} = 64 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$

Vậy 192 là số hạng thứ 7.

**3.** Tìm các số hạng của cấp số nhân $(u_n)$ có năm số hạng, biết:

a) $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$;

b) $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.

### Giải

Áp dụng: $u_n = u_1.q^{n-1}$

a) Ta có $u_3 = u_1q^2 \Rightarrow u_1q^2 = 3$

$u_5 = u_1q^4 \Rightarrow u_1q^4 = 27$

Do đó $q^2 = (u_1q^4) : (u_1q^2) = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

Với $q = 3$ ta có $u_1 = \frac{1}{3}$, ta có cấp số nhân: $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27.

Với $q = -3$ ta có $u_1 = \frac{1}{3}$, ta có cấp số nhân: $\frac{1}{3}$; –1; 3; –9; 27.

b) Ta có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(q^2 - 1\right) = 25 & (1) \\ u_1\left(q^2 - 1\right) = 50 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1), ta được $50.q = 25, \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Từ (2) suy ra $u_1 = \frac{50}{q^2 - 1} = \frac{50}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{200}{3}$.

Ta có cấp số nhân: $-\frac{200}{3}, -\frac{100}{3}, -\frac{50}{3}, -\frac{25}{3}, -\frac{25}{6}$.

**4.** Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

### *Giải*

Giả sử cấp số nhân là $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ có công bội q.

Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q + u_2q + u_3q + u_4q + u_5q = 31q \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 31q \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 \end{cases}$$

Suy ra $31.q = 62, \Leftrightarrow q = 2$. Vì $S_5 = 31 = \frac{u_1\left(1 - 2^5\right)}{1 - 2} \Rightarrow u_1 = 1$.

Vậy ta có cấp số nhân: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

**5.** Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người, hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu?

### *Giải*

Gọi số dân của tỉnh đó là N.

Sau một năm, số dân tăng thêm là 1,4% N.

Vậy số dân của tỉnh đó vào năm sau là N + 1,4% N = 101,4% N.

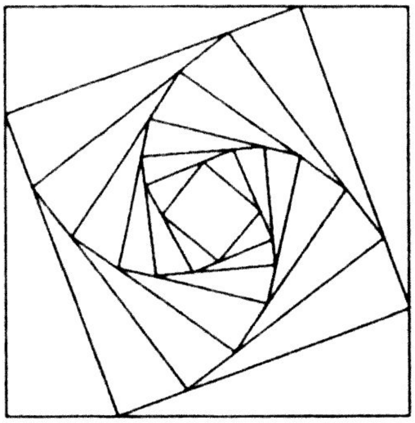
Số dân tỉnh đó sau mỗi năm lập thành một cấp số nhân

$$N, \frac{101,4}{100}.N, \left(\frac{101,4}{100}\right)^2 N, \ldots$$

Giả sử N = 1,8 triệu người thì sau 5 năm số dân của tỉnh là

$$\left(\frac{101,4}{100}\right)^5 .1,8 \approx 1,9 \text{ (triệu)}$$

và sau 10 năm sẽ là: $\left(\frac{101,4}{100}\right)^{10} .1,8 \approx 2,1$ (triệu).



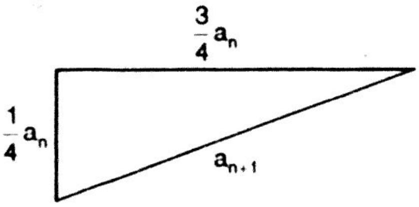
**6.** Cho hình vuông $C_1$ có cạnh bằng 4. Người ta chia các cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông $C_2$. Từ hình vuông $C_2$ lại làm tiếp như trên để được hình vuông $C_3$,... Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$

Gọi $a_n$ là độ dài cạnh của hình vuông $C_n$. Chứng minh dãy số $(a_n)$ là một cấp số nhân.

### *Giải*

Xét dãy $(a_n)$, với $a_1 = 4$. Giả sử hình vuông $C_n$ độ dài cạnh là $a_n$. Hình vuông $C_{n+1}$ có độ dài cạnh $a_{n+1}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có:



$$a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a_n\right)^2} = a_n \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}, \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số $(a_n)$ là cấp số nhân với $a_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ lập thành cấp số cộng, chứng minh a, b, c lập thành cấp số nhân.

**2.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_n = 5$, $a_5 = 135$, $a_6 = -405$. Tính $a_1$ và q.

**3.** Cho cấp số nhân $(a_n)$, chứng minh:

a) $a_1a_p = a_qa_{p-q+1}$ $(p \geq q)$; b) $a_pa_q = a_ma_n$ với $p + q = m + n$

**4.** Cho 3 số a, b, c lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$$

Áp dụng: Tìm ba số liên tiếp của cấp số nhân biết tổng là 14 và tổng bình phương là 84.

***Hướng dẫn:*** Vì $(a + c)^2 - b^2 = a^2 + c^2 + 2ac - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$

**5.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ biết $a_1 + a_5 = 51$, $a_2 + a_6 = 102$. Tìm n biết $S_n = 3069$.

***Hướng dẫn:*** Tìm được $a_1 = 3$, $q = 2$.

Áp dụng công thức: $S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ suy ra n = 10.

# ÔN TẬP CHƯƠNG III

**1.** Khi nào thì cấp số cộng là dãy số tăng, dãy số giảm?

### *Trả lời*

$(u_n)$ là cấp số cộng thì $u_{n+1} - u_n = d$.

Nếu $d > 0$ thì $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, khi đó $(u_n)$ là dãy số tăng.

Nếu $d < 0$ thì $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, khi đó $(u_n)$ là dãy số giảm.

**2.** Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội q. Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a) $q > 0$?　　　　b) $q < 0$?

### *Trả lời*

Ta có $u_n = u_1q^{n-1}$.

a) Vì $u_1 < 0$ nên với $q > 0$ thì $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Với $q < 0$ thì $u_n < 0$ nếu n lẻ và $u_n > 0$ nếu n chẵn.

**3.** Cho hai cấp số cộng có cùng số các số hạng. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số cộng không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

### *Trả lời*

Giả sử hai cấp số cộng $(u_n)$ và $(v_n)$ gồm cùng n số hạng và lần lượt có công sai là $d_1$ và $d_2$.

Khi đó ta có:

$$(u_k + v_k) - (u_{k-1} + v_{k-1}) = (u_k - u_{k-1}) + (v_k - v_{k-1}) = d_1 + d_2 \text{ với } 1 \le k \le n.$$

$\Rightarrow$ dãy số $(u_n + v_n)$ là cấp số cộng có công sai $(d_1 + d_2)$.

Chẳng hạn, từ hai cấp số cộng có cùng 4 số hạng:

3, 5, 7, 9 công sai $d_1 = 2$,

−2, 1, 4, 7 công sai $d_2 = 3$,

Khi đó cấp số cộng 1, 6, 11, 16 công sai $d = 5$.

**4.** Cho hai cấp số nhân có cùng số các số hạng. Tích các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số nhân không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

### *Trả lời*

Giả sử hai cấp số nhân $(u_n)$ và $(v_n)$ gồm n số hạng và lần lượt có công bội là $q_1$ và $q_2$.

Khi đó ta có $u_k.v_k = (u_{k-1}.q_1)(v_{k-1}.q_2) = (u_{k-1}.v_{k-1}).(q_1.q_2)$ với $1 \le k \le n$.

Suy ra dãy $(u_nv_n)$ là cấp số nhân công bội $q_1q_2$.

**5.** Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $13^n - 1$ chia hết cho 6;  b) $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.

*Giải*

a) Đặt $A_n = 13^n - 1$, ta chứng minh $A_n \vdots 6$ (1) $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Với $n = 1$ ta có $A_1 = 12 \vdots 6$. Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là $A_k = 13^k - 1 \vdots 6$. Ta chứng minh $A_{k+1} \vdots 6$.

Thật vậy: $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13(13^k - 1) + 12 = 13.A_k + 12 \vdots 6$ (vì $A_k \vdots 6$)

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$ nên (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

b) Đặt $B_n = 3n^3 + 15n$, ta chứng minh $B_n \vdots 9$, $n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$, ta có $B_1 = 18 \vdots 9$. Giả sử $B_k = 3k^3 + 15k \vdots 9$

Khi đó $B_{k+1} = 3(k + 1)^3 + 15(k + 1) = (3k^3 + 15k) + 9(k^2 + k + 2) \vdots 9$.

(vì $B_k = 3k^3 + 15k \vdots 9$). Vậy $B_n \vdots 9$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**6.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$ (với $n \geq 1$).

a) Viết năm số hạng đầu của dãy;

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

*Giải*

a) $u_1 = 2$, $u_2 = 2u_1 - 1 = 3$, $u_3 = 2u_2 - 1 = 5$

$u_4 = 2u_3 - 1 = 9$, $u_5 = 2u_4 - 1 = 17$

b) Với $n = 1$ ta có $u_1 = 2^0 + 1 = 2$; đẳng thức đúng với $n = 1$

Giả sử $u_k = 2^{k-1} + 1$; khi đó $u_{k+1} = 2u_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 1$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$ nên đẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$.

**7.** Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số $(u_n)$, biết:

a) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$;  b) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$;  c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

*Giải*

a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = n + 1 + \dfrac{1}{n+1} - n - \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

$$= 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0 \text{ vì } \frac{1}{n(n+1)} < 1$$

$\Rightarrow$ dãy $(u_n)$ là dãy số tăng.

Vì $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $(u_n)$ là dãy bị chặn dưới. $(u_n)$ không bị chặn trên vì với n lớn vô cùng thì $u_n$ cũng lớn vô cùng.

b) Ta có: $u_1 = \sin 1 > 0$; $u_2 = -\sin\frac{1}{2} < 0$; $u_3 = \sin\frac{1}{3} > 0$

$\Rightarrow u_1 > u_2$; $u_2 < u_3 \Rightarrow (u_n)$ là dãy không tăng không giảm.

Ta có: $|u_n| = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le u_n \le 1$, với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $(u_n)$ là dãy bị chặn.

c) Ta có $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Với $n \ge 1$ thì $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \ge \sqrt{2} + 1$,

do đó $0 < u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ $\forall n \ge 1 \Rightarrow (u_n)$ là dãy bị chặn.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

**8.** Tìm số hạng đầu $u_1$ và công sai d của các cấp số cộng $(u_n)$, biết:

a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

### *Giải*

Áp dụng $u_n = u_1 + (n-1)d$ và $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

a) Ta có $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10(u_1 + 4d) = 0 \\ \dfrac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 30 \\ u_1^2 + 14u_1d + 65d^2 = 585 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -12 \\ d = \dfrac{21}{5} \end{cases}$

**9.** Tìm số hạng đầu $u_1$ và công bội q của các cấp số nhân $(u_n)$, biết:

a) $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144; \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$

### *Giải*

Áp dụng $u_n = u_1q^{n-1}$

a) $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^5 = 192 \\ u_1.q^6 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 6. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q\left(q^2 - 1\right) = 72 & (1) \\ u_1.q^2\left(q^2 - 1\right) = 144 & (2) \end{cases}$

Chia (2) cho (1), ta có $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) ta được $u_1 = 12$.

c) Ta có: $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q + u_1q^4 - u_1q^3 = 10 \\ u_1q^2 + u_1q^5 - u_1q^4 = 20 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(1 + q^3 - q^2\right) = 10 & (1) \\ u_1q^2\left(1 + q^3 - q^2\right) = 20. & (2) \end{cases}$$

Chia (2) cho (1), ta được $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) ta được $u_1 = 1$.

**10** Tứ giác ABCD có các số đo góc lập thành một cấp số nhân theo thứ tự A, B, C, D. Biết rằng góc C gấp bốn lần góc A. Tính các góc của tứ giác.

### *Giải*

Giả sử cấp số nhân A, B, C, D có công bội q ($q > 0$).

Ta có $B = Aq$, $C = Aq^2$, $D = Aq^3$.

Vì $C = 4A$ nên $Aq^2 = 4A \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$

Ta có $360^\circ = A + B + C + D = S_4 = \dfrac{A\left(1 - q^4\right)}{1 - q} = 15A$

$\Rightarrow A = 24^\circ$, $B = 48^\circ$, $C = 96^\circ$, $D = 192^\circ$.

**11** Biết rằng ba số x, y, z lập thành một cấp số nhân ($x \neq 0$) và ba số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

### *Giải*

Giả sử cấp số nhân số x, y, z có công bội q, ta có $y = qx$, $z = q^2x$.

x, 2y, 3z là cấp số cộng nên $x + 3z = 4y$

$$\Leftrightarrow x + 3q^2x = 4qx \Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \text{ (vì } x \neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

**12** Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng một bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là $12288m^2$. Tính diện tích mặt trên cùng.

### *Giải*

Gọi diện tích mặt trên của tầng thứ i là $u_i$ ($i = 1, 2, ..., 11$).

Ta có $(u_i)$ là cấp số nhân với $u_1 = 6144$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $u_{11} = u_1.q^{10} = 6144\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 6$

Vậy diện tích mặt trên cùng là $6m^2$.

**13.** Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng nếu các số $a^2$, $b^2$, $c^2$ lập thành một cấp số cộng thì các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

*Giải*

Ta có $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ là cấp số cộng

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \Leftrightarrow \frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$$

$\Leftrightarrow \frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b} \Leftrightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow$ $a^2$, $b^2$, $c^2$ lập thành cấp số cộng.

Vậy nếu $a^2$, $b^2$, $c^2$ lập thành cấp số cộng thì các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành cấp số cộng.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**14.** Cho dãy số $(u_n)$, biết $u_n = 3^n$. Hãy chọn phương án đúng:

a) Số hạng $u_{n+1}$ bằng:

(A) $3^n + 1$; (B) $3^n + 3$; (C) $3^n.3$ (D) $3(n + 1)$.

b) Số hạng $u_{2n}$ bằng:

(A) $2.3^n$; (B) $9^n$; (C) $3^n + 3$ (D) $6n$.

c) Số hạng $u_{n-1}$ bằng:

(A) $3^n - 1$; (B) $\frac{1}{3}.3^n$; (C) $3^n - 3$ (D) $3n - 1$.

d) Số hạng $u_{2n-1}$ bằng:

(A) $3^2.3^n - 1$; (B) $3^n.3^{n-1}$; (C) $3^{2n} - 1$ (D) $3^{2(n-1)}$.

*Trả lời*

a) $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3.3^n$. Chọn (C)

b) $u_{2n} = 3^{2n} = 9^n$. Chọn (B)

c) $u_{n-1} = 3^{n-1} = \frac{1}{3}.3^n$. Chọn (B)

d) $u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n3^{n-1}$. Chọn (B)

**15.** Hãy cho biết dãy số $(u_n)$ nào dưới đây là dãy số tăng, nếu biết công thức số hạng tổng quát $u_n$ của nó là:

(A) $(-1)^{n+1}.\sin\frac{\pi}{n}$;  (B) $(-1)^{2n}(5^n+1)$;  (C) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$;  (D) $\frac{n}{n^2+1}$.

*Trả lời*

Dãy số (A) không tăng không giảm.

Dãy số (C), (D) giảm.

$$u_n = (-1)^{2n}(5^n+1) = 5^n+1 < 5^{n+1}+1 = u_{n+1}$$

Dãy số (B) tăng. Chọn (B).

**16** Cho cấp số cộng: -2, x, 6, y.

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây:

(A) x = -6, y = -2;  (B) x = 1, y = 7;  (C) x = 2, y = 8;  (D) x = 2, y = 10.

*Trả lời*

-2, x, 6, y là cấp số cộng thì $\begin{cases}-2+6=2x\\ x+y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=10\end{cases}$. Chọn (D)

**17** Cho cấp số nhân: -4, x, -9.

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

(A) x = 36;  (B) x = -6,5;  (C) x = ±6;  (D) x = -36.

*Trả lời*

-4, x, -9 là cấp số nhân thì $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$. Chọn (C).

**18** Cho cấp số cộng $(u_n)$. Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau đây:

(A) $\frac{u_{10}+u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$;  (B) $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$;

(C) $u_{10}.u_{30} = u_{20}$  (D) $\frac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}$.

*Trả lời*

Ta có: $u_{90} + u_{210} = u_1 + 89d + u_1 + 209d = 2u_1 + 298d$

$= 2(u_1 + 149d) = 2u_{150}$ Chọn (B)

**19**. Trong các dãy số cho bởi các công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân

(A) $\begin{cases}u_1 = 2\\ u_{n+1} = u_n^2\end{cases}$;  (B) $\begin{cases}u_1 = -1\\ u_{n+1} = 3u_n\end{cases}$;

(C) $\begin{cases}u_1 = -3\\ u_{n+1} = u_n + 1\end{cases}$;  (D) 7, 77, 777, ..., $\underbrace{777...7}_{\text{n chữ số 7}}$.

*Trả lời*

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$, $\forall n \in N^*$. Chọn (B).

# *Chương* IV GIỚI HẠN

## §1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

*1. Định nghĩa 1*

Ta nói dãy số $(u_n)$ có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

*Kí hiệu:* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

*2. Định nghĩa 2*

Ta nói dãy số $(v_n)$ có giới hạn là số a (hay $v_n$ dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - a) = 0$.

*Kí hiệu:* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

*3. Một vài giới hạn đặc biệt*

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c = c$.

### II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

*Định lí 1*

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

## III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cho cấp số nhân $(u_n)$ lùi vô hạn có $|q| < 1$, khi đó

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$$

## IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

*1. Định nghĩa*

- Ta nói dãy số $(u_n)$ có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $u_n$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  *Kí hiệu:* $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

  *Kí hiệu:* $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

  *Nhận xét:* $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

*2. Một vài giới hạn đặc biệt*

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

*3. Định lí*

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24\,000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người ($T$ được gọi là chu kì bán rã).

Gọi $u_n$ là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số $(u_n)$.

b) Chứng minh rằng $(u_n)$ có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn $10^{-6}$ g.

*Giải*

a) Ta có : $u_1 = \dfrac{1}{2}$ ; $u_2 = \dfrac{1}{4}$ ; $u_3 = \dfrac{1}{8}$ ;...

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in N^*$.

b) Áp dụng tính chất $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Ta có $\lim \frac{1}{2^n} = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

c) Ta có $10^{-6}$ g = $10^{-9}$ kg = $\frac{1}{10^9}$ kg.

Vì $u_n \to 0$, nên $|u_n| = \frac{1}{2^n}$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Như vậy, $|u_n|$ nhỏ hơn $\frac{1}{10^9}$ kể từ chu kì $n_0$ nào đó. Nghĩa là sau một số năm ứng với chu kì này, khối lượng chất phóng xạ không còn độc hại đối với con người.

Để hiểu rõ hơn, nên bổ sung vào lời giải trên nội dung sau:

Cụ thể, muốn $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^9}$, ta cần chọn $n_0$ sao cho $2^{n_0} > 10^9$.

Chẳng hạn, với $n_0 = 36$, thì $2^{36} = (2^4)^9 = 16^9 > 10^9$. Nói cách khác, sau chu kì thứ 36 (nghĩa là sau 36.24000 = 864000 (năm))! chúng ta không còn lo lắng về sự độc hại của khối lượng chất phóng xạ còn lại.

**2.** Biết dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi n.

Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$.

### Giải

Vì $\lim \frac{1}{n^3} = 0$ nên $\left|\frac{1}{n^3}\right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, ta có $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} = \left|\frac{1}{n^3}\right|$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim(u_n - 1) = 0$. Do đó, $\lim u_n = 1$.

**3.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2}$; b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$; c) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n}$; d) $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$.

### Giải

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2} = \lim \frac{n\left(6 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}}$

Vì $\lim(6 - \frac{1}{n}) = \lim 6 - \lim\frac{1}{n} = 6$

và $\lim(3 + \frac{2}{n}) = \lim 3 + \lim\frac{2}{n} = 3$ nên $\frac{6n-1}{3n+2} = \lim\frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{6}{3} = 2$

b) $\lim\frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1} = \lim\frac{n^2\left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim\frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$

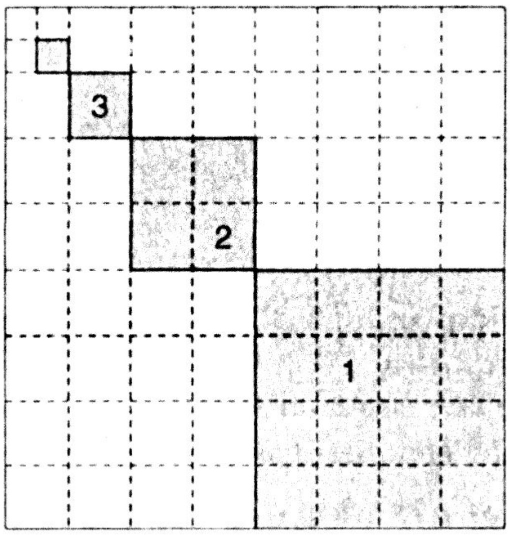
$$= \frac{\lim 3 + \lim\frac{1}{n} - \lim\frac{5}{n^2}}{\lim 2 + \lim\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

c) $\lim\frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n} = \lim\frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\right]}{4^n\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} = \lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 5$

vì $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

d) $\lim\frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim\frac{n\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n\left(4 - \frac{2}{n}\right)} = \lim\frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{3}{4}$

**4.** Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., n, ..., trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó.



Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể tiến ra vô hạn.

a) Gọi $u_n$ là diện tích của hình vuông màu xám thứ n. Tính $u_1$, $u_2$, $u_3$ và $u_n$.

b) Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + .. + u_n$.

### *Giải*

a) Ta có $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{4^2}$, $u_3 = \frac{1}{4^3}$,..., $u_n = \frac{1}{4^n}$;

b) $(u_n)$ là cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{4}$, công bội $q = \frac{1}{4}$, do đó:

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

**5.** Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \ldots$

### *Giải*

Đặt $u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{10^n} : \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} = -\frac{1}{10}$

Suy ra dãy số $(u_n)$ là cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$

Vậy $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1+\frac{1}{10}} = -\frac{10}{11}$

**6.** Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn a = 1,020 202... (chu kì là 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

### *Giải*

Ta có $a = 1{,}020202\ldots = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{100^2} + \ldots + \frac{2}{100^n} + \ldots$

Vì $\frac{2}{100}, \frac{2}{100^2}, \ldots, \frac{2}{100^n}$ là một cấp số nhân lùi vô hạng với $u_1 = \frac{2}{100}$,

$q = \frac{1}{100}$ nên: $a = 1 + \frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$.

**7.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$;

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$;

c) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} - n\right)$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} + n\right)$.

### *Giải*

a) Ta có $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

(vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 1 > 0$)

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2) = \lim n^2\left(-1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = -\infty$;

$$\left(\text{vì } \lim n^2 = +\infty \text{ và } \lim\left(-1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = -1 < 0\right)$$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} - n\right) = \lim \dfrac{-n}{\left(\sqrt{n^2 - n} + n\right)} = \lim \dfrac{-n}{n\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + 1\right)} = \lim \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + 1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} + n\right) = \lim n\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} + 1\right) = +\infty$

$$\left(\text{vì } \lim n = +\infty \text{ và } \lim\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = 2 > 0\right)$$

**8.** Cho hai dãy số $(u_n)$ và $(v_n)$. Biết $\lim u_n = 3$; $\lim v_n = +\infty$. Tính các giới hạn:

a) $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$;    b) $\lim \dfrac{v_n + 2}{v_n^2 - 1}$.

*Giải*

a) $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{3\lim u_n - 1}{\lim u_n + 1} = \dfrac{3.3 - 1}{3 + 1} = 2$

b) $\lim \dfrac{v_n + 2}{v_n^2 - 1} = \lim \dfrac{v_n^2\left(\dfrac{1}{v_n} + \dfrac{2}{v_n^2}\right)}{v_n^2\left(1 - \dfrac{1}{v_n^2}\right)} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{v_n} + \dfrac{2}{v_n^2}}{1 - \dfrac{1}{v_n^2}} = 0$ (vì $\lim \dfrac{1}{v_n} = 0$).

## B. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(3 + \dfrac{(-1)^n \sin n}{n + 1}\right)$;    b) $\lim \dfrac{3n - 2}{2n + 1}$

ĐS: a) 3;    b) $\dfrac{3}{2}$.

**2.** Tìm các giới hạn $\lim u_n$ với:

a) $u_n = \dfrac{-n^4 + 3n^2 - 1}{2n^4 + 1}$;    b) $u_n = \dfrac{3.5^n}{6^{n+1} + 2}$

ĐS: 1) $-\dfrac{1}{2}$;    b) 0.

**3.** Tìm tổng của cấp số nhân:

a) $8, 4, 2, 1, \dfrac{1}{2} \ldots$;    b) $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}, \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \ldots$

ĐS: a) 16;    b) $4 + 3\sqrt{2}$.

**4.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$;  b) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)$

c) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$;  d) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n$

e) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$.

**5.** Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) 0,444...;  b) 0,2121...;  c) 0,32111...

# §2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

**a. Định nghĩa**

Cho khoảng K chứa điểm $x_0$ và hàm số y = f(x) xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n)$ dần tới L.

*Kí hiệu*: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

**b. Định lí về giới hạn hữu hạn**

*Định lí*

a) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

(Dấu của f(x) được xét trên khoảng đang tìm giới hạn với $x \neq x_0$).

### c. Giới hạn một bên

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

  Số L được gọi là *giới hạn bên phải* của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

  *Kí hiệu* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

  Số L được gọi là *giới hạn bên trái* của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

  *Kí hiệu* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

  *Định lí:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

## 2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

*Định nghĩa*

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

*Kí hiệu* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

*Kí hiệu* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

## 3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

### a. Giới hạn vô cực

*Định nghĩa:* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

*Kí hiệu* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$.

*Nhận xét:* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

### b. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

### c. Các quy tắc tìm giới hạn

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ |
|---|---|---|
| $L > 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $L < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $-\infty$ | $+\infty$ |

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | Dấu của g(x) | $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|---|
| L | $\pm\infty$ | Tùy ý | 0 |
| $L > 0$ | 0 | + | $+\infty$ |
| | | − | $-\infty$ |
| $L < 0$ | | + | $-\infty$ |
| | | − | $+\infty$ |

## C. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2}$;   b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$.

### *Giải*

a) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$ có tập xác định

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} = \left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right);\ x = 4 \in \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Giả sử $(x_n)$ là dãy số bất kì với $x_n > \dfrac{2}{3}$; $x_n \neq 4$ và $x_n \to 4$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim\dfrac{x_n+1}{3x_n-2} = \dfrac{4+1}{3.4-2} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2} = \dfrac{1}{2}$.

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $(x_n)$ là dãy số bất kì, $x_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2 - 5x_n^2}{x_n^2 + 3} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{x_n^2} - 5}{1 + \dfrac{3}{x_n^2}} = -5.$

Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3} = -5.$

**2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

và các dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{1}{n}$; $(v_n)$ với $v_n = -\dfrac{1}{n}$.

Tính $\lim u_n$, $\lim v_n$, $\lim f(u_n)$ và $\lim f(v_n)$.

Từ đó có kết luận gì về giới hạn của hàm số đã cho khi $x \to 0$?

*Giải*

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim v_n = \lim \left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

Do $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$ và $v_n = -\dfrac{1}{n} < 0$, nên $f(u_n) = \sqrt{\dfrac{1}{n}} + 1$ và $f(v_n) = -\dfrac{2}{n}$.

Từ đó: $\lim f(u_n) = \lim \left(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + 1\right) = 1$; $\lim f(v_n) = \lim \dfrac{-2}{n} = 0.$

Vì $u_n \to 0$ và $v_n \to 0$, nhưng $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ nên hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

**3.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4 - x^2}{x + 2}$; c) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 6}{4 - x}$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{17}{x^2 + 1}$; f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + x - 1}{3 + x}$.

*Giải*

a) Ta có $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -3} (x - 1) = -3 - 1 = -4$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4 - x^2}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} (2 - x) = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{(x + 3) - 9}{(x - 6)\left(\sqrt{x + 3} + 3\right)} = \lim\limits_{x \to 6} \dfrac{1}{\sqrt{x + 3} + 3} = \dfrac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{6}{x}\right)}{x\left(\dfrac{4}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{6}{x}}{\dfrac{4}{x}-1}=\dfrac{2}{-1}=-2$

e) Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{17}{x^2+1}=0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x}+1}=-\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x}+1}=-2<0$)

**4.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}$.

*Giải*

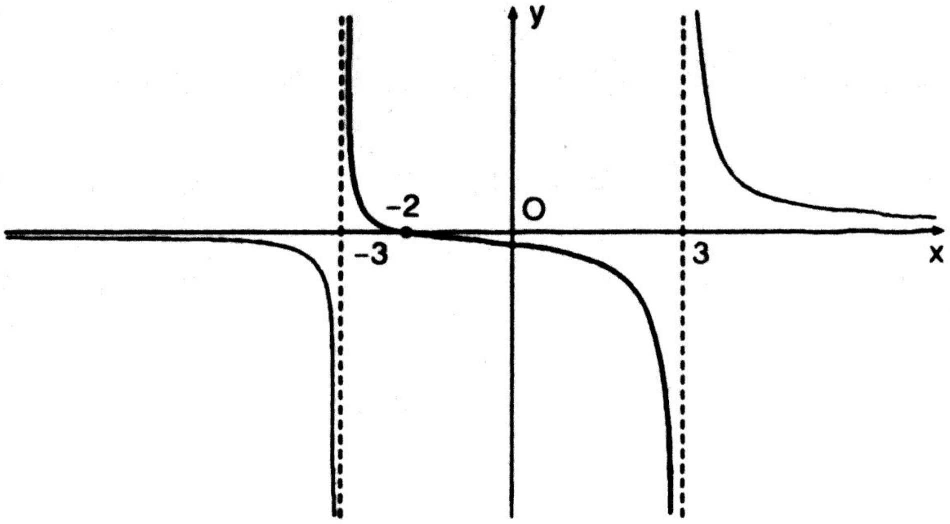
a) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)=1>0$; $\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2=0$ và $(x-2)^2>0,\ \forall x\neq2$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-7)=-5<0$; $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ và $x-1<0\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-7)=-5<0$; $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ và $x-1>0\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}=-\infty$

**5.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-9}$, có đồ thị như hình dưới.



a) Quan sát đồ thị và nêu nhận xét về hàm số đã cho khi $x \to -\infty$, $x \to 3^-$ và $x \to -3^+$.

b) Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-\infty; -3)$,
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3; 3)$,
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với $f(x)$ được xét trên khoảng $(-3; 3)$.

### *Giải*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$.

b) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = -\infty \; ; \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = +\infty$$

**6.** Tính:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ ;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{5 - 2x}$.

### *Giải*

a) $$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - x^2 + x - 1) = \lim_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) = +\infty$$

(vì $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right) = 1 > 0$)

b) $$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5) = \lim_{x \to -\infty} x^3(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}) = +\infty$$

(vì $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3}) = -2 < 0$)

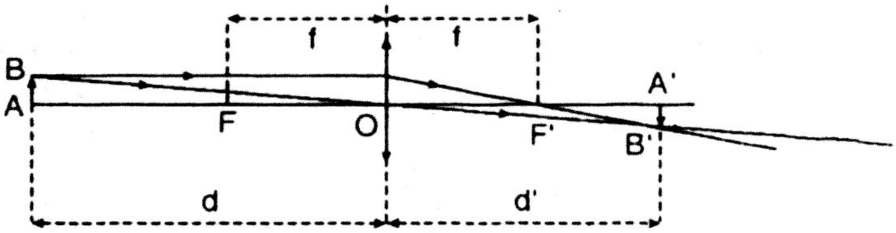
c) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \lim_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = +\infty$$

(vì $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = 1 > 0$)

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(\dfrac{5}{x}-2\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{\dfrac{5}{x}-2} = -1$

**7.** Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d′ lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh A′B′ của nó tới quang tâm O của thấu kính.

Công thức thấu kính là $\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}$.

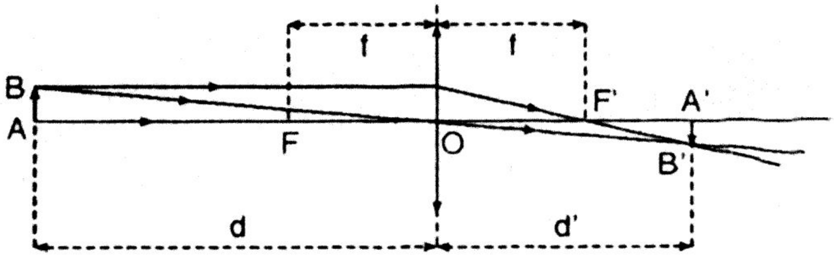


a) Tìm biểu thức xác định hàm số d′ = φ(d).

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to+\infty}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

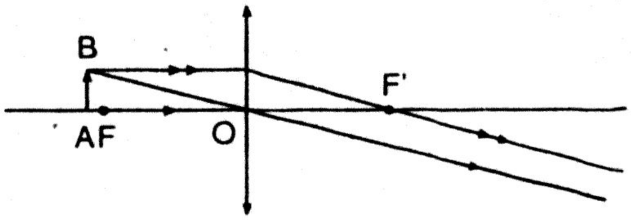
## *Giải*

a) Từ hệ thức $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{f}$ suy ra: $d' = \varphi(d) = \dfrac{fd}{d-f}$;



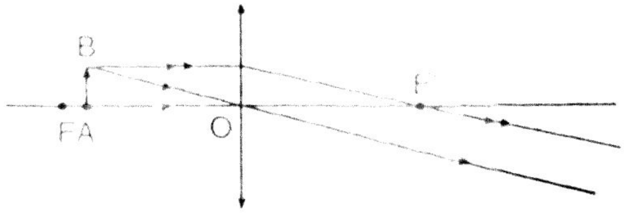
b) • $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{fd}{d-f} = +\infty.$

Kết quả này nghĩa là: nếu vật thật AB tiến dần về tiêu điểm F sao cho d luôn lớn hơn f thì ảnh của nó dần tới dương vô cực.



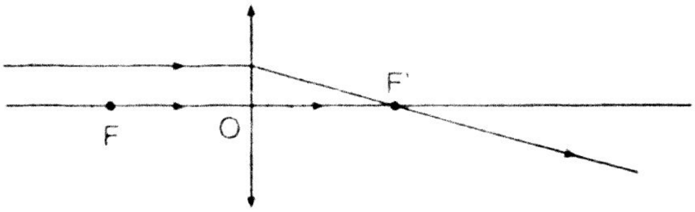
• $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d) = \lim\limits_{d\to f^-}\dfrac{fd}{d-f} = -\infty,$

nghĩa là: nếu vật thật AB tiến dần về tiêu điểm F sao cho d luôn nhỏ hơn f thì ảnh của nó dần tới âm vô cực.



- $\lim\limits_{d \to +\infty} \varphi(d) = \lim\limits_{d \to +\infty} \dfrac{fd}{d - f} = \lim\limits_{d \to +\infty} \dfrac{f}{1 - \dfrac{f}{d}} = f,$

nghĩa là: nếu vật thật AB ở xa vô cực so với thấu kính thì ảnh của nó ở ngay trên tiêu diện ảnh (mặt phẳng qua tiêu điểm ảnh F' và vuông góc với trục chính).



## C BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$

***Hướng dẫn:*** a) $x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(x^2 - 3x - 2)$. Đáp số: 7.

b) Đáp số: $\dfrac{1}{6}$; c) Đặt $t = \sqrt[12]{x}$. Đáp số: $\dfrac{4}{3}$.

d) Đặt $t = \sqrt[n]{1 + x}$ và áp dụng: $t^n - 1 = (t - 1)(t^{n-1} + t^{n-2} + ... + t + 1)$. Đáp số: $\dfrac{1}{n}$.

**2.** Tính các giới hạn: a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - nx + n - 1}{x - 1}$

Đáp số: a) $\dfrac{m}{n}$; b) $\dfrac{n(n - 1)}{2}$.

**3.** Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right)$

Đáp số: a) $\dfrac{1}{2}$; b) $-\dfrac{5}{2}$; c) 0

**4.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4 - 2x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5x - 1}{1 - x}$; d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x - 1}{1 - x}$

ĐS: a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$;

**5.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x - 2}{(x + 1)^2 (x - 2)}$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5}{(x + 1)(x^2 - 2x + 3)}$

ĐS: a) $+\infty$; b) $-\infty$.

# §3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

*Định nghĩa:* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là *liên tục* tại $x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

### 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

*Định nghĩa*

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trên một khoảng* nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trên đoạn [a; b]* nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

### 3. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

*Định lí 1*

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

*Định lí 2:* Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm $x_0$. Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ cũng liên tục tại $x_0$,

b) Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại $x_0$ nếu $g(x_0) \neq 0$.

*Định lí 3:* Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tại $x_0 = 3$.

### *Giải*

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$f(3) = 3^3 + 2.3 - 1 = 32$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 32 = f(3)$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

**2.** a) Xét tính liên tục của hàm số $y = g(x)$ tại $x_0 = 2$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

b) Trong biểu thức xác định $g(x)$ ở trên, cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$?

### *Giải*

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$g(2) = 5$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12$$

Ta có $\lim\limits_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$ nên $g(x)$ không liên tục tại $x_0 = 2$.

b) Thay 5 bởi 12 thì $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$.

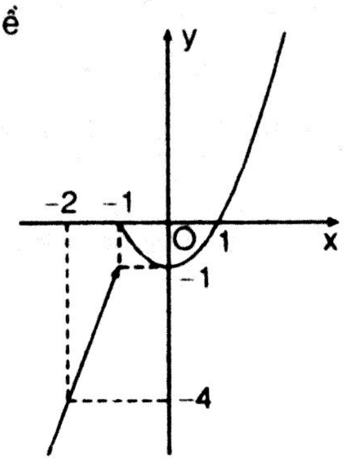
Khi đó $g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

**3.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{nếu } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq -1 \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Từ đó nêu nhận xét về tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

b) Khẳng định nhận xét trên bằng một chứng minh.

### *Giải*



a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Hàm số liên tục tại mọi $x \neq -1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số gián đoạn tại $x = -1$.

b) Ta có: $f(-1) = 0$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (3x + 2) = -1$$

Vì $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = -1$.

**4.** Cho các hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 6}$ và $g(x) = \tan x + \sin x$.

Với mỗi hàm số, hãy xác định các khoảng trên đó hàm số liên tục.

### Giải

* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x - 6}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$; $(-3; 2)$ và $(2; +\infty)$.

* $g(x) = \tan x + \sin x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

**5.** Ý kiến sau đúng hay sai?

*"Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tại điểm $x_0$ còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại $x_0$, thì $y = f(x) + g(x)$ là một hàm số không liên tục tại $x_0$."*

### Giải

Ý kiến đúng.

Giả sử ngược lại $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0$.

Vì $y = f(x)$ là hàm số liên tục tại $x_0$ nên hiệu $[f(x) + g(x)] - f(x) = g(x)$ là hàm số liên tục tại $x_0$, điều này trái với giả thiết. Vậy $y = f(x) + g(x)$ là hàm số không liên tục tại $x_0$.

**6.** Chứng minh rằng phương trình:

a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm; b) $\cos x = x$ có nghiệm.

### Giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2) = -3$; $f(0) = 1$; $f(1) = -3$

$f(-2).f(0) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $-2; 0)$.

$f(0).f(1) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Vậy phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

b) Xét hàm số $f(x) = \cos x - x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0).f(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{3} < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1** a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{|x|}{x}$;   b) f liên tục tại x = 0 không?

**2** Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x < 2 \end{cases}$

***Hướng dẫn:*** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow$ f gián đoạn tại x = 1.

**3**. Tìm các điểm gián đoạn của các hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x \neq 0 \\ -2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$;   b) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

**4**. Định a, b để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax + b & \text{nếu } 3 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$$

***Hướng dẫn:*** Tại $x_0 = 3$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3a + b = 1$ (1)

Tại $x_0 = 5$: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow 5a + b = 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: a = 1; b = −2.

**5.** Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng (−2; 2).

***Hướng dẫn:*** $f(-2), f(-1) < 0$;   $f(-1).f(1) < 0$;   $f(1).f(2) < 0$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG IV

**2.** Cho hai dãy số $(u_n)$ và $(v_n)$. Biết $|u_n - 2| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số $(u_n)$?

*Giải*

$\lim v_n = 0$ và $|u_n - 2| \leq v_n$ thì $\lim(u_n - 2) = 0 \Rightarrow \lim u_n = 2$

**3.** Tên của một bạn học sinh được mã hóa bởi số 1530. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị của một trong các biểu thức A, H, N, O với:

$A = \lim \dfrac{3n - 1}{n + 2}$;   $H = \lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$;   $N = \lim \dfrac{\sqrt{n} - 2}{3n + 7}$;   $O = \lim \dfrac{3^n - 5.4^n}{1 - 4^n}$.

Hãy cho biết tên của bạn học sinh này, bằng cách thay các chữ số tên bởi các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

*Giải*

$$A = \lim\frac{3n-1}{n+2} = \lim\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 3$$

$$H = \lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = \lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1$$

$$N = \lim\frac{\sqrt{n}-2}{3n+7} = \lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}}{3+\frac{7}{n}} = 0$$

$$O = \lim\frac{3^n-5.4^n}{1-4^n} = \lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-5}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1} = 5$$

Vậy tên của học sinh đó là: HOAN.

**4.** a) Có nhận xét gì về công bội của các cấp số nhân lùi vô hạn?

b) Cho ví dụ về một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số âm và một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số dương và tính tổng của mỗi cấp số nhân đó.

*Giải*

a) q là công bội của cấp số nhân lùi vô hạn thì $|q| < 1$.

b) * $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $(n \geq 1)$ là cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = -\frac{1}{2}$, công bội $q = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Tổng } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

* $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(n \geq 1)$ là cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{Tổng } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

**5.** Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-5}{x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+x^2-2x+1)$; e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{3x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}$.

## *Giải*

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+x+4}=\dfrac{2+3}{4+2+4}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-5}{x-4}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3+x^2-2x+1)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^3\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$

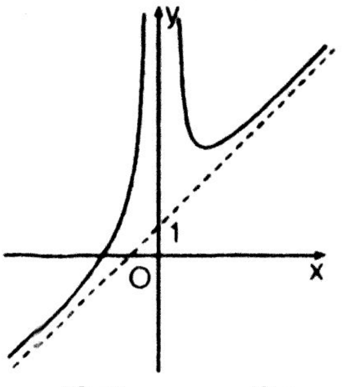
vì $\lim\limits_{x\to +\infty}x^3=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-1<0$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{3x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{3-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$

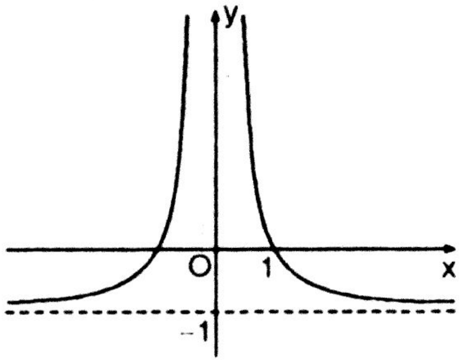
f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-x}{3x-1}$

$$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-1}{3-\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{2}{3}$$

**6.** Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$ và $g(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$.



*(Đường cong $C_1$)*



*(Đường cong $C_2$)*

a) Tính $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Hai đường cong trên đây là đồ thị của hai hàm số đã cho. Từ kết quả câu a) hãy xác định đường cong nào là đồ thị của mỗi hàm số đã cho.

*Giải*

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - x^2}{x^2} = +\infty$, (vì $\lim\limits_{x \to 0}(1 - x^2) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$; $x^2 > 0$, $\forall x \neq 0$)

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

b) Đường cong thứ nhất là đồ thị của hàm số $y = g(x)$, đường cong thứ hai là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

**7.** Xét tính liên tục trên R của hàm số: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x > 2 \\ 5 - x & \text{nếu } x \leq 2. \end{cases}$

*Giải*

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Tại $x_0 = 2$. Ta có: $g(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (5 - x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (x + 1) = 3$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = g(2)$ nên $g(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Vậy $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

**8.** Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

*Giải*

Hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0).f(1) = (-2).1 = -2 < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Ta có $f(1).f(2) = 1.(-8) = -8 < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; 2)$.

Ta có $f(2).f(3) = (-8).13 < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(2; 3)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$.

# BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**9.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Một dãy số có giới hạn thì luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm.

(B) Nếu $(u_n)$ là dãy số tăng thì $\lim u_n = +\infty$.

(C) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$, thì $\lim(u_n - v_n) = 0$.

(D) Nếu $u_n = a^n$ và $-1 < a < 0$ thì $\lim u_n = 0$.

***Trả lời:*** Nếu $u_n = a^n$ và $-1 < a < 0$ thì $\lim u_n = 0$. Chọn (D).

**10.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2 + 1}$.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $\lim u_n = 0$; (B) $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$;

(C) $\lim u_n = 1$; (D) Dãy $(u_n)$ không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

***Trả lời:*** Ta có: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2\left(n^2+1\right)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$ Chọn (B).

**11.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{2}\right)^n$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $\lim u_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{2}\right)^n + \ldots = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$;

(B) $\lim u_n = -\infty$;

(C) $\lim u_n = +\infty$;

(D) Dãy số $(u_n)$ không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

***Trả lời:*** Ta có $u_n = \sqrt{2}.\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n - 1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \lim u_n = +\infty$. Chọn (C).

*Chọn phương án đúng lần lượt cho các câu 12, 13, 14.*

**12.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x - 1}{x - 1}$ bằng

(A) $-1$; (B) $-\infty$; (C) $-3$ (D) $+\infty$.

***Trả lời:*** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x - 1}{x - 1} = +\infty$. Chọn (D).

**13.** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ bằng:

(A) $+\infty$; (B) 1; (C) $-\infty$; (D) $-1$.

***Trả lời:*** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=+\infty$. Chọn (A).

**14.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x\neq 3\\ m & \text{nếu } x=3\end{cases}$.

Hàm số đã cho liên tục tại x = 3 khi m bằng:

(A) 4; (B) $-1$; (C) 1; (D) $-4$.

***Trả lời:*** Ta có $f(3) = m$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}-\left(\sqrt{x+1}+2\right)=-4.$$ Chọn (D).

**15.** Cho phương trình $-4x^3+4x-1=0$ (1). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

(A) Hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

(B) Phương trình không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$;

(C) Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$;

(D) Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

***Trả lời:*** $f(x)=-4x^3+4x-1$ liên tục trên $[-2; 1]$

và $f(-2).f(1) = 23.(-1) = -23 < 0$

$\Rightarrow$ Phương pháp $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 1)$. Chọn (B

# Chương V. ĐẠO HÀM

## §1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

### A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

**1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn): $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

**2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa**

*Quy tắc*

*Bước 1.* Giả sử $\Delta x$ là số gia của đối số $x_0$, tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

*Bước 2.* Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

*Bước 3.* Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

**3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số**

a) *Định lí 1:* Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x_0$ thì nó liên tục tại điểm đó.

b) *Ý nghĩa hình học của đạo hàm*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

*Định lí 2:* Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0$ là *hệ số góc* của tiếp tuyến $M_0T$ của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

c) *Định lí 3:* Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

d) *Ý nghĩa vật lí*

- Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0$ là đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại $t_0$: $v(t_0) = s'(t_0)$.

- Cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm $t_0$ là đạo hàm của hàm số $Q = Q(t)$ tại $t_0$: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng:

a) $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$; b) $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$.

*Giải*

a) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7$

b) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0,9) - f(1) = (0,9)^3 - 1^3 = -0,271$

**2.** Tính $\Delta y$ và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và $\Delta x$:

a) $y = 2x - 5$; b) $y = x^2 - 1$; c) $y = 2x^3$; d) $y = \dfrac{1}{x}$.

*Giải*

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) - 5 - (2x - 5) = 2\Delta x \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$.

b) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1 = \Delta x\,(2x + \Delta x) \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

c) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 2\Delta x[3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2]$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2]$$

d) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

**3.** Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$; b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$; c) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ tại $x_0 = 0$.

*Giải*

a) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 1 + \Delta x - 2 = 3\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 + \Delta x \Rightarrow f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3 + \Delta x) = 3$$

b) $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \dfrac{1}{2 + \Delta x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} \Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4}$$

c) $\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = \dfrac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x - 1} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{\Delta x - 1} \Rightarrow f'(0) = -2$

**4.** Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

*Giải*

- Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x)^2 = 0$.

  Vậy hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

- Ta có: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$.

  Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$ và $f'(2) = 2$.

**5.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1; -1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2;

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

*Giải*

$$\text{Ta có } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ (x_0 + \Delta x)^2 + x_0 (x_0 + \Delta x) + x_0^2 \right] = 3x_0^2$$

a) $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $f'(-1) = 3$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $(-1; -1)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2;$$

b) $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2^3 = 8$; $f'(2) = 3.2^2 = 12$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm có hoành độ bằng 2 là $y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$.

c) Ta có $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

* Với $x_0 = 1$ ta có $y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

* Với $x_0 = -1$ ta có $y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến là

$$y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$$

**6.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \dfrac{1}{x}$

a) Tại điểm $\left(\frac{1}{2};2\right)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng −1;

c) Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

### Giải

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{\Delta x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0\left(x_0 + \Delta x\right)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

a) $x_0 = \frac{1}{2}$; $y_0 = 2$

$f'(\frac{1}{2}) = -4$

Phương trình tiếp tuyến là: $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow y = -4x + 4$

b) Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$; $f'(-1) = -1$

Phương trình tiếp tuyến là: $y + 1 = -1\ (x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$

c) $f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

* Với $x_0 = 2$ ta có $y_0 = \frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến là: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$

* Với $x_0 = -2$ ta có $y_0 = -\frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến là: $y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x + 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x - 1$

**7.** Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9{,}8\ m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t (t = 5s) đến t + Δt, trong các trường hợp Δt = 0,1 s; Δt = 0,05 s; Δt = 0,001 s.

b) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t = 5s.

### Giải

a) Vận tốc trung bình của chuyển động là:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}g\frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g.(2t + \Delta t) = \frac{1}{2}g.(10 + \Delta t)$$

Với $\Delta t = 0{,}1$ thì $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}g.10{,}1 = 49{,}49$ (m/s)

Với $\Delta t = 0{,}05$ thì $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}g.10{,}05 = 49{,}245$ (m/s)

Với $\Delta t = 0{,}001$ thì $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}g.10{,}001 = 49{,}0049$ (m/s)

b) Vận tốc tức thời tại thời điểm t = 5s : $v = S'(5) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}g.10 = 49$ (m/s)

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Dùng định nghĩa tính đạo hàm hàm số:

a) $y = \cos x$;

b) $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ tại $x_0 = 0$

Đáp số: a) $-\sin x$; b) $f(0) = 1$

**2.** Cho $f(x) = x^2 + 3|x - 1|$. Tính $f'(2)$, $f'(-2)$

Hàm số có đạo hàm tại x = 1 không?

Đáp số: $f'(2) = 7$, $f'(-2) = -7$, f không có đạo hàm tại x = 1.

**3.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{khi} -\sqrt{2} \le x \le 1 \\ x^2 + bx + c \text{ khi} & x > 1 \end{cases}$

Tìm b, c để hàm số f có đạo hàm tại x = 1.

*Hướng dẫn*

Từ điều kiện f liên tục tại $x = 1 \Rightarrow b + c = 0$.

Đạo hàm hai phía bằng nhau suy ra $2 + b = -1$. Vậy $b = -3$, $c = 3$.

**4.** Cho $y = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến:

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$

b) Song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$

c) Vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$

d) Hợp với trục Ox một góc $45^0$.

Đáp số: a) $y = 2$; b) $y = 2x - 1$; c) $y = 4x - 6$.

# §2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. *Định lí 1:* Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. *Định lí 2:* Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm với mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

### II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

**1. Định lí 3**

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$(u + v)' = u' + v' \qquad (u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (v = v(x \neq 0)$$

**2. Hệ quả 1**

Nếu k là một hằng số thì $(ku)' = ku'$.

**3. Hệ quả 2:** $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$.

### III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

*Định lí 4:* Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là $u'_x$ và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là $y'_u$ thì hàm hợp $y = f[g(x)]$ có đạo hàm (theo x) là: $y'_x = y'_u.u'_x$.

*Bảng tóm tắt*

$$\boxed{\begin{array}{l} (u + v - w)' = u' + v' - w' \\ (ku)' = ku' \text{ (k là hằng số)} \\ (uv)' = u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \\ y'_x = y'_u.u'_x \end{array}}$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Bằng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số

a) $y = 7 + x - x^2$ tại $x_0 = 1$; b) $y = x^3 - 2x + 1$ tại $x_0 = 2$.

*Giải*

a) $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{7 + (1+\Delta x) - (1+\Delta x)^2 - 7}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-1 - \Delta x) = -1$

b) $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(2+\Delta x)^3 - 2(2+\Delta x) + 1 - 5}{\Delta x} = 10$

**2.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$; b) $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$;

c) $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x^2}{5} - 1$; d) $y = 3x^5(8 - 3x^2)$.

*Giải*

a) $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$; b) $y' = -\dfrac{1}{3} + 2x - 2x^3$;

c) $y' = 2x^3 - 2x^2 + \dfrac{8}{5}x$; d) $y = 24x^5 - 9x^7 \Rightarrow y' = 120x^4 - 63x^6$

**3.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^7 - 5x^2)^3$; b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$; c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$;

d) $y = \dfrac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$; e) $y = \left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^3$, (m, n là các hằng số).

*Giải*

a) $y' = 3(x^7 - 5x^2)^2.(x^7 - 5x^2)' = 3(x^7 - 5x^2)^2(7x^6 - 10x)$

b) $y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1).(5 - 3x^2)'$

$= 2x(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(-6x) = -12x^3 + 4x$

c) $y' = \dfrac{2(x^2 - 1) - 2x2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2}{\left(x^2 - 1\right)^2}$;

d) $y' = \dfrac{-5\left(x^2 - x + 1\right) - (3 - 5x).(2x - 1)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} = \dfrac{5x^2 - 6x - 2}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$;

e) $y' = 3\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2.\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)' = -\dfrac{6n}{x^3}\left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^2$.

**4.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$; b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số); d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

### *Giải*

a) $y' = 2x - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $y' = \dfrac{-5 - 2x}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}$;

c) $$y' = \frac{3x^2\sqrt{a^2 - x^2} - x^3\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'}{a^2 - x^2} = \frac{3x^2\sqrt{a^2 - x^2} + x^3.\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{x^2\left(3a^2 - 2x^2\right)}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}};$$

d) $$y' = \frac{\sqrt{1 - x} - (1 + x).\dfrac{(-1)}{2\sqrt{1 - x}}}{1 - x} = \frac{2(1 - x) + (1 + x)}{2\sqrt{(1 - x)^3}} = \frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}.$$

**5.** Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để:

a) $y' > 0$; b) $y' < 3$.

### *Giải*

a) Ta có $y' = 3x^2 - 6x$

$y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$

b) $y' < 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Tính đạo hàm các hàm số sau:

**1.** a) $y = (x^4 + 1)(\sqrt{x} + 1)$; b) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$;

c) $y = (3x^5 - 1)^3$; d) $y = \dfrac{1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

**2.** a) $y = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$; b) $= \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

**3.** a) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}}{2x+1}$;  b) $y = (x+1)\sqrt{x^2+x+1}$

**4.** a) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;  b) $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f}$

Đáp số:

1. a) $y' = 4x^3(\sqrt{x}+1) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^4+1\right)$;  b) $y' = \dfrac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$

c) $y' = 45x^4(3x^5-1)^2$;  d) $y' = \dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^3}$

2. a) $y' = \dfrac{3x^2-2}{\sqrt{x^3-2x+1}}$;  b) $y' = -\dfrac{2x+1}{2\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^3}}$

3. a) $y' = \dfrac{-11}{2(2x+1)^2\sqrt{x^2+x+3}}$;  b) $y' = \dfrac{4x^2+5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

4. a) $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;  b) $y' = \dfrac{acx^2+2afx+bf-ce}{(ex+f)^2}$.

# §3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. *Định lí 1:* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.}$

2. *Định lí 2:* Hàm số y = sinx có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

3. *Định lí 3:* Hàm số y = cosx có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

4. *Định lí 4:* Hàm số y = tanx có đạo hàm tại mọi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. *Định lí 5:* Hàm số y = cotx có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**Bảng đạo hàm**

| | |
|---|---|
| $(x^n)' = nx^{n-1}$<br>$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$<br>$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$<br>$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$<br>$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. |
| $(\sin x)' = \cos x$<br>$(\cos x)' = -\sin x$<br>$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$<br>$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ | $(\sin u)' = u'.\cos u$<br>$(\cos u)' = -u'.\sin u$<br>$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$<br>$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ |

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x-1}{5x-2}$;   b) $y = \dfrac{2x+3}{7-3x}$;   c) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{3-4x}$;   d) $y = \dfrac{x^2+7x+3}{x^2-3x}$.

*Giải*

a) $y' = \dfrac{5x-2-5(x-1)}{(5x-2)^2} = \dfrac{3}{(5x-2)^2}$;

b) $y' = \dfrac{2(7-3x)+3(2x+3)}{(7-3x)^2} = \dfrac{23}{(7-3x)^2}$;

c) $y' = \dfrac{(2x+2)(3-4x)+4(x^2+2x+3)}{(3-4x)^2} = \dfrac{-2\left(2x^2-3x-9\right)}{(3-4x)^2}$;

d) $y' = \dfrac{(2x+7)\left(x^2-3x\right)-(2x-3)\left(x^2+7x+3\right)}{\left(x^2-3x\right)^2} = \dfrac{-10x^2-6x+9}{x^2(x-3)^2}$.

**2.** Giải các bất phương trình:

a) $y' < 0$ với $y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$;   b) $y' > 0$ với $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

c) $y' > 0$ với $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x+4}$.

*Giải*

a) Ta có $y' = \dfrac{(2x+1)(x-1)-\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$$y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Tập nghiệm bất phương trình $y' < 0$ là $S = (-1;\ 1) \cup (1;\ 3)$.

b) $$y' = \frac{2x(x+1) - \left(x^2+3\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Vậy $S = (-\infty;\ -3] \cup [1;\ +\infty)$;

c) $$y' = \frac{2\left(x^2 + x + 4\right) - (2x+1)(2x-1)}{\left(x^2 + x + 4\right)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 9}{\left(x^2 + x + 4\right)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 9 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{19}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{19}}{2}$$

Vậy $S = \left(\frac{1 - \sqrt{19}}{2}; \frac{1 + \sqrt{19}}{2}\right)$.

**3.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$; b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; c) $y = x\cot x$;

d) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$; e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$; f) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$.

### *Giải*

a) $y' = 5\cos x + 3\sin x$

b) $$y' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

c) $$y' = \cot x + x.\frac{(-1)}{\sin^2 x} = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$$

d) $$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x\cos x - \sin x).\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

e) $y' = \dfrac{(1+2\tan x)'}{2\sqrt{1+2\tan x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$

f) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\cos\sqrt{1+x^2}$

**4.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (9-2x)(2x^3-9x^2+1)$;   b) $y = \left(6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)(7x-3)$;

c) $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$;   d) $y = \tan^2 x - \cot x^2$;   e) $y = \cos\dfrac{x}{1+x}$.

### *Giải*

a) $y' = -2(2x^3-9x^2+1) + (6x^2-18x)(9-2x)$;

b) $y' = \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^3}\right)(7x-3) + 7\left(6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;   c) $y' = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}}$;

d) $y' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} + \dfrac{2x}{\sin^2 x^2}$;   e) $y' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}\sin\dfrac{x}{1+x}$.

**5.** Tính $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(1)}$, biết rằng $f(x) = x^2$ và $\varphi(x) = 4x + \sin\dfrac{\pi x}{2}$.

### *Giải*

Ta có $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$; $\varphi'(x) = 4 + \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2} \Rightarrow \varphi'(1) = 4$

Vậy $\dfrac{f'(1)}{\varphi'(1)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

**6.** Chứng minh rằng các hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc x:

a) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$;

b) $y = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

### *Giải*

a) Ta có: $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

$\Rightarrow$ $y' = 0$: không phụ thuộc x.

b) $$y = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] - (1 - \cos 2x)$$

$$= 1 + \cos\frac{2\pi}{3}\cos 2x + \cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x + \cos 2x$$

$$= 1 - \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x + \cos 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \cos 2x = 1$$

$\Rightarrow y' = 0$: không phụ thuộc x.

**7.** Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng:

a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$; b) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$.

### *Giải*

a) Ta có $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi = -1 \text{ (với } \cos\varphi = \frac{4}{5}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + \varphi + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $f'(x) = -\cos(\pi + x) - \sin\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = -\cos x \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi - k4\pi \\ x = \pi + k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pi + k\frac{4\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}.$$

**8.** Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$, biết rằng:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$;

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.

### *Giải*

a) Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1$; $g'(x) = 6x + 1$

$$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 1 > 6x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right.$$

Tập nghiệm là: $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;

b) $f'(x) = 6x^2 - 2x$, $g'(x) = 3x^2 + x$

Ta có $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$

Vậy $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1**. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x^3}{x}$; b) $y = \tan x^2 - \cot^2 x$;

c) $y = \cot\sqrt{1 + x^2}$; d) $y = (3 - \cos 2x)^3$

**2**. Xác định m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f'(x) > 0$ với $f(x) = \dfrac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$;

b) $g'(x) < 0$ với $g(x) = \dfrac{mx^3}{3} - \dfrac{mx^2}{2} + (m + 1)x - 15$

**3**. Chứng minh rằng $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, nếu:

a) $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$;

b) $f(x) = \cos^6 x + 2\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \sin^4 x$;

c) $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$;

d) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right)\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$.

# §4. VI PHÂN

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

### 1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Cho số gia $\Delta x$ tại x sao là $x + \Delta x \in (a; b)$.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hoặc $y'\Delta x$) là *vi phân* của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia $\Delta x$ và kí hiệu là dy hoặc df(x).

$$dy = y'\Delta x \text{ hoặc } df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$, thì: $dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$.

Vì vậy ta có: $dy = y'dx$ hoặc $df(x) = f'(x)dx$.

**2.** Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_{\omega}).\Delta x$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a, b là các hằng số); b) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$.

*Giải*

a) $y' = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}dx$ ;

b) $y' = (2x+4)(x^2 - \sqrt{x}) + (x^2 + 4x + 1)\left(2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$\Rightarrow dy = y'dx = \left[(2x+4)\left(x^2 - \sqrt{x}\right) + \left(x^2 + 4x + 1\right)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx.$$

**2.** Tìm dy, biết:

a) $y = \tan^2 x$; b) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$.

*Giải*

a) $y' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} \Rightarrow dy = y'dx = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}dx$;

b) Tương tự $dy = y'dx = \dfrac{\left(x^2 - 1\right)\sin x + 2x\cos x}{\left(1 - x^2\right)^2}dx.$

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Cho $y = \sqrt{x^2 - 2x}$, chứng minh rằng $ydy - (x - 1)dx = 0$

**2.** Tìm giá trị gần đúng của:

a) $\sqrt[3]{215}$ ; b) $\cos 61^0$; c) $\sqrt[4]{1,04}$

Đáp số: a) 5,9907 (xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 216.\Delta x = -1$)

b) 0,4849 (xét $f(x) = \cos x$, $x_0 = 60^0$, $\Delta x = 1^0 = 0,0174$)

c) 1,01

# §5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

## A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ và hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x. Khi đó, ta gọi đạo hàm của $y'$ là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là $y''$ hoặc $f''(x)$.
- *Chú ý:* Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu là $f^{(n-1)}(x)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là *đạo hàm cấp n* của f(x), kí hiệu là $y^{(n)}$, hay $f^{(n)}(x)$.

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

**Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai**

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* của chuyển động $s = f(t)$.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

**1.** a) Cho $f(x) = (x + 10)^6$. Tính $f''(2)$;

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

*Giải*

a) Ta có $f'(x) = 6(x + 10)^5$; $f''(x) = 30(x + 10)^4$

$$\Rightarrow f''(2) = 30(2 + 10)^4 = 30.12^4 = 622080$$

b) Ta có $f'(x) = 3\cos 3x \Rightarrow f''(x) = -9\sin 3x$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 9\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -9$$

$$f''(0) = 0;\ f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{9}{2}.$$

**2.** Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{1-x}$; b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; c) $y = \tan x$; d) $y = \cos^2 x$.

*Giải*

a) $y' = \dfrac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$; b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}} \Rightarrow y'' = \dfrac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$

c) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; d) $y' = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2\cos 2x$.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

**1.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sin3x\cos2x$; b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; c) $y = x\sqrt{x^2 + 2}$; d) $y = x\cos x$

**2.** Cho $y = \dfrac{x - 3}{x + 4}$.Chứng minh rằng $2y'^2 = (y - 1)y''$

**3.** Cho $y = \sqrt{x + 1}$, chứng minh rằng $4y^3y'' + 1 = 0$.

# ÔN TẬP CHƯƠNG V

**1.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - 5$; b) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{6}{7x^4}$; c) $y = \dfrac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$;

d) $y = \left(\dfrac{2}{x} + 3x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)$; e) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$; f) $y = \dfrac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$.

*Giải*

a) $y' = x^2 - x + 1$; b) $y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{24}{7x^5}$;

c) $y' = \dfrac{3x^2 - 7}{4x^2}$; d) $y' = \dfrac{9x^2\sqrt{x} - 6x^2 - 2\sqrt{x} + 4}{2x^2}$;

e) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)^2}$; f) $y' = \dfrac{-4x^2 - 10x + 15}{\left(x^2 - 3x\right)^2}$.

**2.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2\sqrt{x}\sin x - \dfrac{\cos x}{x}$; b) $y = \dfrac{3\cos x}{2x + 1}$; c) $y = \dfrac{t^2 + 2\cos t}{\sin t}$;

d) $y = \dfrac{2\cos\varphi - \sin\varphi}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$; e) $y = \dfrac{\tan x}{\sin x + 2}$; f) $y = \dfrac{\cot x}{2\sqrt{x} - 1}$.

*Giải*

a) $y' = \dfrac{\left(\sqrt{x} + 1\right)x\sin x + \left(2x^2\sqrt{x} + 1\right)\cos x}{x^2}$; b) $y' = \dfrac{-3(2x + 1)\sin x - 6\cos x}{(2x + 1)^2}$

c) $y' = \dfrac{2t\sin t - t^2\cos t - 2}{\sin^2 t}$; d) $y' = \dfrac{-7}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$;

e) $y' = \dfrac{2 + \sin^3 x}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2}$;  f) $y' = \dfrac{\dfrac{1 - 2\sqrt{x}}{\sin^2 x} - \dfrac{\cot x}{\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x} - 1\right)^2}$.

**3.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Tính $f(3) + (x - 3)f'(3)$.

*Giải*

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}} \Rightarrow f'(3) = \dfrac{1}{4}$; $f(3) = 2$

Vậy $f(3) + (x - 3)\, f'(3) = 2 + \dfrac{x - 3}{4} = \dfrac{x + 5}{4}$.

**4.** Cho hai hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \dfrac{1}{1 - x}$. Tính $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

*Giải*

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1$;  $g'(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2} \Rightarrow g'(0) = 1$

Vậy $\dfrac{f'(0)}{g'(0)} = 1$.

**5.** Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng: $f(x) = 3x + \dfrac{60}{x} - \dfrac{64}{x^3} + 5$.

*Giải*

Ta có $f'(x) = 3 - \dfrac{60}{x^2} + \dfrac{192}{x^4} = \dfrac{3x^4 - 60x^2 + 192}{x^4}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 60x^2 + 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 4 \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{\pm 2; \pm 4\}$.

**6.** Cho $f_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, $f_2(x) = x\sin x$. Tính $\dfrac{f_1'(1)}{f_2'(1)}$.

*Giải*

$f_1'(x) = \dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2} \Rightarrow f_1'(1) = -\sin 1 - \cos 1$

$f_2'(x) = \sin x + x\cos x \Rightarrow f_2'(1) = \sin 1 + \cos 1$

Vậy $\dfrac{f_2'(1)}{f_2'(1)} = -1$

**7.** Viết phương trình tiếp tuyến

a) của hypebol $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm A(2; 3).

b) của đường cong $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

c) của parabol $y = x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$.

*Giải*

a) Ta có $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$

Phương trình tiếp tuyến là: $y - 3 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 7$

b) $y' = 3x^2 + 8x$; $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2$ và $y'(-1) = -5$

$y' = -5$

Phương trình tiếp tuyến là: $y - 2 = -5(x + 1) \Leftrightarrow y = -5x - 3$

c) $y_0 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

Ta có $y' = 2x - 4$

* Với $x_0 = 1$ ta có $y'(1) = -2$

Phương trình tiếp tuyến là: $y - 1 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 3$

* Với $x_0 = 3$ ta có $y'(3) = 2$

Phương trình tiếp tuyến là: $y - 1 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 5$

**8.** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của chuyển động khi t = 2s.

b) Tìm gia tốc của chuyển động khi t = 3s.

c) Tìm gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.

d) Tìm vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

*Giải*

Ta có $S' = 3t^2 - 6t - 9$; $S'' = 6t - 6$

a) Vận tốc khi t = 2: $v = S'(2) = 3.2^2 - 6.2 - 9 = -9$ (m/s)

b) Gia tốc khi t = 3: $y = S''(3) = 12$ (m/s$^2$)

c) $v = S' = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Gia tốc tại thời điểm t = 3: $y = S''(3) = 12$ (m/m$^2$)

d) $y = S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó $v = S''(1) = -12$ (m/s)

**9.** Cho hai hàm số: $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kể trên.

### *Giải*

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị: $\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Với $x = 1$ thì $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy hai đồ thị cắt nhau tại $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ tại A là:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = y'(1)(x - 1). \text{ Mà } y' = -\frac{1}{\sqrt{2}.x^2} \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy tiếp tuyến có phương trình $d_1$:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) \text{ hay } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \text{ tại A là: } d_2\text{: } y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(x - 1) \text{ hay } y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hệ số góc của $d_1$, $d_2$ lần lượt là: $k_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $k_2 = \sqrt{2} \Rightarrow k_1.k_2 = -1$.

Vậy hai tiếp tuyến $d_1$ và $d_2$ vuông góc nhau.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

*Tìm phương án đúng:*

**10.** Với $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$; $g'(2)$ bằng

(A) 1; (B) –3; (C) –5; (D) 0.

***Trả lời:*** Ta có $g'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$. Chọn (B).

**11.** Nếu $f(x) = \sin^3 x + x^2$ thì $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

(A) 0; (B) 1; (C) –2; (D) 5.

***Trả lời:*** $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x + 2x$

$\Rightarrow f''(x) = 3(2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x) + 2 \Rightarrow f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5$. Chọn (D)

**12.** Giả sử $h(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1)$. Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$ là

(A) $[-1; 2]$; (B) $(-\infty; 0]$; (C) $\{-1\}$; (D) $\varnothing$.

*Trả lời:* $h'(x) = 15(x+1)^2 + 4$; $h''(x) = 30(x+1)$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Chọn (C)

**13.** Cho $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 0$ là

(A) $\varnothing$; (B) $(0; +\infty)$; (C) $[-2; 2]$; (D) $(-\infty; +\infty)$.

*Trả lời:* Ta có $f'(x) = x^2 + x + 1 \le 0$ vô nghiệm. Chọn (A)

# ÔN TẬP CUỐI NĂM

**1.** Cho hàm số $y = \cos 2x$.

a) Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$ với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos 2x$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{\pi}{3}$.

c) Tìm tập xác định của hàm số $z = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos^2 2x}}$.

*Giải*

a) Ta có $\cos 2(x + k\pi) = \cos(2x + k2\pi) = \cos 2x$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Học sinh tự vẽ đồ thị (C) hàm số $y = \cos 2x$

b) $y = \cos 2x \Rightarrow y' = -2\sin 2x$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \qquad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ là

$$y + \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$$

c) Hàm số Z xác định $\Leftrightarrow 1 - \cos 2x \ge 0 \Leftrightarrow \cos 2x \le 1$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$.

**2.** Cho hàm số $y = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2x}$.

a) Tính $A = \dfrac{5}{6 + 7\sin 2a}$, biết rằng $\tan a = 0{,}2$.

b) Tính đạo hàm của hàm số đã cho.

c) Xác định các khoảng trên đó y' không dương.

### Giải

a) Ta có $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a} = \dfrac{2.0,2}{1+(0,2)^2} = \dfrac{5}{13}$

Do đó $A = \dfrac{5}{6+7.\dfrac{5}{15}} = \dfrac{65}{113}$

b) $y' = \dfrac{-5(6+7\sin 2x)'}{(6+7\sin 2x)^2} = \dfrac{-70\cos 2x}{(6+7\sin 2x)^2}$

c) $y' \le 0 \Leftrightarrow \cos 2x \ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \le 2x \le \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**3.** Giải các phương trình

a) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2x - 2\sin\dfrac{x}{2}\sin^2x = \cos^2x - \sin^2x$; b) $3\cos x + 4\sin x = 5$;

c) $\sin x + \cos x = 1 + \cos x\sin x$; d) $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$ ($x \in [\pi; 3\pi]$);

e) $\left(\cos\dfrac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(1+\sin\dfrac{x}{4} - 3\cos x\right)\cos x = 0.$

### Giải

a) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2x - 2\sin\dfrac{x}{2}\sin^2x = \cos^2x - \sin^2x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}(\cos^2x - \sin^2x) = \cos^2x - \sin^2x$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin\dfrac{x}{2} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k4\pi\end{array}\right.,\ (k \in \mathbb{Z}$$

b) $3\cos x + 4\sin x = 5 \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\mathrm{coxs} + \dfrac{4}{5}\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = 1$ (với $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$)

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = k2\pi \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi$

c) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x \Leftrightarrow 1 + \sin x.\cos x - \sin x - \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

d) $$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 - \cos x = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right.$$

Vì $x \in [\pi; 3\pi]$ nên tập nghiệm $S = \left\{2\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right\}$.

e) $$\left(\cos\frac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 3\cos x\right)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{x}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} + \cos x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{x}{4}\right) + \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{5x}{4} + \cos x = 3.$$

Vì $\sin\dfrac{5x}{4} \leq 1$, $\cos x \leq 1$ nên phương trình vô nghiệm $S = \varnothing$

**4.** Trong một bệnh viện có 40 bác sĩ ngoại khoa. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ca mổ, nếu mỗi ca gồm:

a) Một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ?

b) Một bác sĩ mổ và bốn bác sĩ phụ?

### *Giải*

a) Cách phân công ca mổ gồm một bác sĩ mổ và một bác sĩ phụ là số chỉnh hợp chập 2 của 40 phần tử. Vậy có

$$A_{40}^2 = \frac{40!}{38!} = 39.40 = 1560 \text{ cách}$$

b) Có 40 cách chọn 1 bác sĩ mổ

Có $C_{39}^4$ cách chọn 4 bác sĩ phụ trong 39 bác sĩ còn lại.

Vậy có 40. $C_{39}^4$ cách chọn 1 bác sĩ mổ và bốn bác sĩ phụ.

**5.** Tìm số hạng không chứa a trong khai triển của nhị thức $\left(\dfrac{1}{a^3} + a^2\right)^{10}$.

### *Giải*

Ta có $$\left(\frac{1}{a^3} + a^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{a^3}\right)^{10-k} .\left(a^2\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \frac{a^{2k}}{a^{30-3k}}$$

Số hạng không chứa a ứng với k thỏa: $2k = 30 - 3k \Leftrightarrow 5k = 30 \Leftrightarrow k = 6$

Số hạng không chứa a là $C_{10}^{6}$.

**6.** Chọn ngẫu nhiên ba học sinh từ một tổ gồm có sáu nam và bốn nữ. Tính xác suất sao cho:

a) Cả ba học sinh đều là nam. b) Có ít nhất một nam.

### Giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{10}^{3}$

a) Gọi A là biến cố cả ba học sinh đều là nam thì $n(A) = C_{6}^{3}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^3}{C_{10}^3}$$

b) Gọi B là biến cố "có ít nhất một nam"

thì $\overline{B}$ là biến cố: "cả ba đều là nữ"

$$\text{Ta có } P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3}$$

**7.** Một tiểu đội có 10 người được xếp thành hàng dọc, trong đó có anh A và anh B. Tính xác suất sao cho:

a) A và B đứng liền nhau;

b) Trong hai người đó có một người đứng ở vị trí số 1 và người kia đứng ở vị trí cuối cùng.

### Giải

Ta có $n(\Omega) = 10!$

a) X là biến cố A và B đứng liền nhau thì $n(X) = 2.9!$

$$\Rightarrow p(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{2.9!}{10!} = \frac{1}{5}$$

b) Y là biến cố: "Hai người A, B có 1 người đứng ở vị trí số 1 và người kia đứng ở cuối cùng" thì $n(Y) = 2.8!$

$$\text{Do đó } p(Y) = \frac{n(Y)}{n(\Omega)} = \frac{2.9!}{10!} = \frac{1}{45}$$

**8.** Tìm cấp số cộng tăng, biết rằng tổng ba số hạng đầu của nó bằng 27 và tổng các bình phương của chúng bằng 275.

### Giải

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = 27$

$$u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27 \Leftrightarrow u_1 + d = 9 \Leftrightarrow d = 9 - u_1.$$

Từ đó, thay vào phương trình

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^3 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275$$

$$\Leftrightarrow 3u_1^2 + 6u_1d + 5d^2 = 275$$

Ta được: $2u_1^2 - 36u_1 + 130 = 0$.

Giải phương trình, ta được: $u_1 = 13$ hoặc $u_1 = 5$.

Vì $d = 9 - u_1 = 9 - 13 < 0$ không thỏa mãn điều kiện cấp số cộng tăng, do đó phải loại trường hợp này.

Vậy: $u_1 = 5$, $d = 4$.

**9.** Cho biết trong một cấp số nhân hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ hai bằng 12 và nếu thêm 10 vào số hạng thứ nhất, thêm 8 vào số hạng thứ hai còn giữ nguyên số hạng thứ ba thì ba số mới lập thành một cấp số cộng. Hãy tính tổng của năm số hạng đầu của cấp số nhân đã cho.

### *Giải*

Kí hiệu các số hạng của cấp số nhân đã cho là $u_1, u_2, u_3, \ldots$, công bội là q.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_3 - u_2 = 12 & (1) \\ (u_1 + 10) + u_3 = 2(u_2 + 8) & (2) \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow u_1q^2 - u_1q = 12 \Leftrightarrow u_1(q^2 - q) = 12$

Và (2) $\Leftrightarrow (u_1 + 10) + u_1q^2 = 2(u_1q + 8)$

$\Leftrightarrow u_1q^2 - 2u_1q + u_1 - 6 = 0 \Leftrightarrow u_1(q - 1)^2 = 6$.

nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} u_1(q-1)^2 = 6 \\ u_1(q^2 - q) = 12 \end{cases}$ $(q \neq 0, q \neq 1)$.

Giải hệ trên, ta được $q = 2$, $u_1 = 6$.

Từ đó: $S_5 = \dfrac{6(2^5 - 1)}{2 - 1} = 186$.

**10** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1}$;

b) $\lim \left( \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+1} + \dfrac{3}{n^2+1} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2+1} \right)$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1}$;

d) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right)$.

### *Giải*

a) $\lim \dfrac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1} = \lim \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n} - 2\right)^2}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = 4$

b) $$\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\ldots+\frac{n-1}{n^2+1}\right)=\lim\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2+1}$$

$$=\lim\frac{n(n-1)}{2\left(n^2+1\right)}=\lim\frac{1-\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

c) $$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1}=\lim\frac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

d) $$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}(n-1-n)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$$

**11.** Cho hai dãy số $(u_n)$, $(v_n)$ với $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$ và $v_n=\dfrac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+1}$.

a) Tính $\lim u_n$.

b) Chứng minh rằng $\lim v_n=0$.

### *Giải*

a) Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{n}{n^2+1}=\lim\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$

b) Ta có $v_n=|v_n|=\left|\dfrac{n\cos\frac{\pi}{n}}{n^2+1}\right|\le\dfrac{n}{n^2+1}=u_n$ vì $\lim u_n=0$ nên $\lim V_n=0$

**12.** Chứng minh rằng hàm số $y=\cos x$ không có giới hạn khi $x\to+\infty$.

### *Giải*

Đặt $f(x)=\cos x$.

Chọn $u_n=\dfrac{\pi}{2}+n2\pi$; $\quad v_n=\pi+2n\pi$; $n\in\mathbb{N}$

Ta có $\lim u_n=\lim v_n=+\infty$ nhưng $\lim f(u_n)=0$ và $\lim f(v_n)=-1$

Do đó hàm số $y=\cos x$ không có giới hạn khi $x\to+\infty$

**13.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{6 - 3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$; b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$; c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left( x + x^2 + \ldots + x^n - \dfrac{n}{1 - x} \right)$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 3}$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x}$; g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + x^2 - 3x + 1)$.

### *Giải*

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{6 - 3x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \dfrac{12}{3} = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x - 2}{(x - 2)(x + 2)\left(x + \sqrt{3x - 2}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 1}{(x + 2)\left(x + \sqrt{3x - 2}\right)} = \dfrac{1}{16}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = -\infty$ vì $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - 3x + 1\right) = -1 < 0$

và $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0;\ x - 2 > 0$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left( x + x^2 + \ldots + x^n - \dfrac{n}{1 - x} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right)(1 - x) - n}{1 - x}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\left(1 - x^n\right) - n}{1 - x} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}} = 2$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2 - 3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \sqrt{4 - \dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{x} - 3} = \dfrac{1}{3}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + x^2 - 3x + 1) = +\infty$

**14.** Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm: $\sin x = x - 1$.

### *Giải*

Xét hàm số $f(x) = x - 1 - \sin x$ và hai số $0;\ \pi$. Hàm số liên tục trên $[0;\ \pi]$

Ta có $f(0) = -1 < 0$; $f(\pi) = \pi - 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình có ít nhất một nghiệm trong $(0; \pi)$. Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm.

**15.** Phương trình sau có nghiệm hay không trong khoảng $(-1; 3)$?

$$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0.$$

### *Giải*

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ và hai số $-1$; $0$.

$f(-1) = 2 > 0$; $f(0) = -1 < 0$ và hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Vậy $\exists c \in (-1; 0) : f(c) = 0$ hay phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$. Vậy phương trình có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$.

**16.** Giải các phương trình:

a) $f'(x) = g(x)$ với $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$;

b) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$.

### *Giải*

a) $f(x) = \sin^3 2x \Rightarrow f'(x) = 3\sin^2 2x 2\cos 2x = 6\sin^2 2x\cos 2x$.

Phương trình $f'(x) = g(x) \Leftrightarrow 6\sin^2 2x\cos 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(6\sin^2 2x + 10\sin 2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 6\sin^2 2x + 10\sin 2x - 4 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi\\ 2x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$

$$f'(x) = -60\sin 3x - 60\sin 5x + 60\sin 4x$$

$$= -60(\sin 3x + \sin 5x - \sin 4x) = -60\sin 4x(2\cos x - 1);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{4}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

**17.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

b) $y = \dfrac{\cos\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$;  d) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

*Giải*

a) $y' = \dfrac{6\tan 3x}{\cos^2 3x}$;

b) $y' = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1} + \cos\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$;

c) $y' = x^2\sin x$;

d) $y' = \dfrac{x^2}{\left(\cos x + x\sin x\right)^2}$.

**18.** Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$;  b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$;

c) $y = \sin ax$ (a là hằng số);  d) $y = \sin^2 x$.

*Giải*

a) $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{(1+x)^3}$;

b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{(1-x)^3}$

c) $y' = a\cos ax \Rightarrow y'' = -a^2\sin ax$;

d) $y' = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2\cos 2x$.

**19.** Cho hàm số: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.  (C)

Hãy xác định các số b, c, d, biết rằng đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-1; -3)$; $(1; -1)$ và $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$.

*Giải*

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

Ta có hệ $\begin{cases} -3 = -1 + b - c + d \\ -1 = 1 + b + c + d \\ 0 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}b + c \end{cases}$

Giải hệ trên ta được $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = 0$, $d = -\dfrac{3}{2}$.

**20.** Cho các hàm số:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d, \qquad (C)$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

Với các số b, c, d tìm được ở bài 19, hãy:

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$.

b) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$.

c) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3}$.

### *Giải*

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}$; $f'(x) = 3x^2 - x$

$x_0 = -1$, $y_0 = -3$; $f'(-1) = 4$

Phương trình tiếp tuyến: $y + 3 = 4(x + 1) \Leftrightarrow y = 4x + 1$

b) $f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

c) $f''(x) = 6x - 1$; $g'(x) = 2x - 3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(\sin 5x) + 1}{g'(\sin 3x) + 3} = \lim_{x \to 0} \frac{6\sin 5x}{2\sin 3x} = 3\lim \frac{\dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}} = 3.\frac{5}{3} = 5$$

# MỤC LỤC

## *Chương I.* HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Hàm số lượng giác ........ 5
§2. Phương trình lượng giác cơ bản ........ 12
§3. Một số phương trình lượng giác thường gặp ........ 17
*Ôn tập chương I* ........ 23

## *Chương II.* TỔ HỢP – XÁC SUẤT

§1. Quy tắc đếm ........ 28
§2. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp ........ 30
§3. Nhị thức Niu-tơn (Newton) ........ 33
§4. Phép thử và biến cố ........ 37
§5. Xác suất của biến cố ........ 41
*Ôn tập chương II* ........ 46

## *Chương III.* DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp toán học ........ 50
§2. Dãy số ........ 55
§3. Cấp số cộng ........ 59
§4. Cấp số nhân ........ 64
*Ôn tập chương III* ........ 68

## *Chương IV.* GIỚI HẠN

§1. Giới hạn của dãy số ........ 74
§2. Giới hạn của hàm số ........ 80
§3. Hàm số liên tục ........ 88
*Ôn tập chương IV* ........ 91

## *Chương V.* ĐẠO HÀM

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm ........ 97
§2. Quy tắc tính đạo hàm ........ 102
§3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác ........ 105
§4. Vi phân ........ 110
§5. Đạo hàm cấp hai ........ 112
*Ôn tập chương V* ........ 113
*Ôn tập cuối năm* ........ 117

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**
*16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội*
*Điện thoại : (04) 3971 4896; (04) 3972 4770 - Fax : (04) 3971 4899*

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*
***Giám đốc*** : **PHÙNG QUỐC BẢO**
***Tổng biên tập*** : **PHẠM THỊ TRÂM**
*Biên tập* : Thanh Hoa
*Trình bày* : Diệu Tâm
*Bìa* : Công ty Sách Hoa Hồng
*Đối tác liên kết xuất bản* : Công ty Sách Hoa Hồng

***GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11***

Mã số : 1L-174ĐH2010
In 5000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Song Nguyên.
Số xuất bản: 290-2010/CXB/12-50/ĐHQGHN, ngày 01/4/2010.
Quyết định xuất bản số : 174LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.